INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL II

Capítulo 2

INTRODUÇÃO À TEORIA DOS JOGOS

Manuel Ramalhete
2018

Nota. Esta apresentação é baseada nas aulas ministradas pelo autor na disciplina de Investigação Operacional II (IO II), do curso de Matemática Aplicada à Economia e à Gestão (MAEG). No entanto, alguns aspectos constantes deste texto, nomeadamente alguns desenvolvimentos adicionais nos jogos de *n-Pessoas* (n>2), não são apresentados nas aulas da disciplina e podem ser retirados sem qualquer perda de generalidade

Manuel Ramalhete

INDICE

INTRODUÇÃO Á TEORIA DOS JOGO

pag.

1. Introdução……………………………………………………………………………….5
2. Classificação dos Jogos……………………………………………………………...6
3. Exemplos……………………………………………………………………………….8
4. Jogos de 2-Pessoas de Soma Nula………………………………………………...11
5. Solução de um Jogo de 2-Pessoas de Soma Nula ………………………………...12
   5.1 Estratégias Puras……………………………………………………………….......12
   5.2 Estratégias Mistas………………………………………………………...................13
   5.3 Solução Gráfica……………………………………………………………………...15
6. Programação Linear e Jogos de Soma Nula…………………………………….....18
7. Jogos de Duas pessoas de Soma Constante……………………………..................23
8. Estratégias Dominadas…………………………………………………….………25
9. Jogos de Duas Pessoas de Soma Não-Constante……………………….................27
10. Solução (não-cooperativa) de um jogo de 2-Pessoas de soma não constante………………………32
11. Jogos Não Cooperativos de n-Pessoas……………………………….……………...38
12. Jogos Cooperativos de n-Pessoas……………………………………………...............45
13. Solução de um Jogo Cooperativo……………………………………………………...53
14. Núcleo de um Jogo de n-Pessoas…………………………………………………….55
15. Valor de Shapley………………………………………………………….....................61
16. Nucléolo de um jogo……………………………………………………….................66

INDICE

INTRODUÇÃO Á TEORIA DOS JOGO

pag.

17. Outros Conceitos de Solução……………………………………………………………………………..73

17.1 Conjunto-solução de Neumann-Morgenstern……………………………………………………………73

17.2 Conjunto-negociação ………………………………………………………………………………74

16.3 Kernel…………………………………………………………………………………………...79

Aplicações de Jogos Cooperativos……………………………………………………………………80

18.1 Distribuição dos Custos de Investimento numa Infra-estrutura Logística…………………………………...80

18.2 Distribuição de custos numa Árvore Geradora Mínima……………………………………………………..83

18.3 O Problema da Insolvência e o mistério religioso no Talmud……………………………………………..85

18.4 Tarifação de Aeronaves num Aeroporto………………………………………………………………92

18.5 Distribuição dos Custos de uma Barragem para Fins Múltiplos…………………………………………..95

19. Anexo…………………………………………………………..…………………………………………….98

20. Bibliografia…………………………………………………………………………………………………99

1. Introdução

Origem. A Teoria dos Jogos foi iniciada por J. Von Neuman, matemático, considerado o seu respectivo pai. Em 1943, juntamente com o economista O. Morgenstern, publicou o livro básico *Theory of Games and Economic Behavior,* considerado obra básica na matéria e com grande repercussão na altura, pelas perspectivas que abria ao conhecimento científico.

Objecto - Análise formal da iteração estratégica entre indivíduos, ou grupos de indivíduos, que se comportam racionalmente em situações de competição.

Obs. Jogos em que intervém apenas um jogador, ou em que intervêm vários jogadores, mas o resultado não resulta do comportamento dos jogadores, mas apenas do acaso, não são jogos estratégicos e, por isso, não são objecto da Teoria dos Jogos. Por exemplo, jogos puros de sorte e azar. Por exemplo, dois jogadores, *A* e *B*, lançam simultaneamente uma moeda ao ar, ganhando o jogador *A* 1€ se o resultado nas duas moedas for igual (duas caras ou duas coroas) e perde 1€ se o resultado for diferente (cara e coroa ou coroa e cara). Os Jogos de sorte e azar são tratados pela teoria das Probabilidades e são também chamados Jogos Estatísticos.

Jogo – conjunto de regras que governam o comportamento de dado número de indivíduos, ou grupos, denominados jogadores. É um modelo formal simplificado de uma situação em que vários jogadores interagem racionalmente numa situação de competição (conflito e/ou cooperação).

Obs1. O modelo formaliza uma situação de conflito mesmo quando pode ocorrer cooperação.

Obs2. Jogo é diferente de partida, embora por vezes os dois conceitos sejam usados com o mesmo sentido. Cada vez que se concretiza um jogo, desde o inicio até ao fim, faz-se (joga-se) uma partida.

Jogadores – participantes no jogo. Um jogador pode ser um indivíduo ou um grupo de indivíduos (empresa, partido, equipa, etc.).

Lances – Elementos constitutivos (componentes) do jogo. As regras do jogo definem a sucessão dos lances e a característica de cada lance.

Lance Pessoal – É um acto em que o jogador escolhe entre várias alternativas.

Lance Aleatório – É um acto em que a escolha é feita de acordo com um mecanismo aleatório.

Estratégia – Plano que especifica e descreve as escolhas do jogador em cada situação durante a partida
Obs. Muitas vezes a estratégia coincide com um lance.

Resultado do jogo – função que especifica o proveito, ou custo, ou genericamente utilidade, em resultado das estratégias dos jogadores. Também se designa por função de *payoff.*

2. Classificação dos Jogos

- Quanto ao nº de jogadores: ***Jogos de 2-Pessoas*** e ***Jogos de n-Pessoas (n>2).***

- Quanto ao nº de lances ou de estratégias: ***Jogos Finitos***, quando o nº de lances e/ou de alternativas é finito, e ***Jogos Infinitos,*** no caso contrário.

- Quanto à informação: ***Jogos de Informação Completa*** ou perfeita, quando os jogadores têm conhecimento das escolhas efectuadas até essa altura, e ***jogos de informação Incompleta*** ou imperfeita, no caso contrário.

- Quanto ao tipo de movimento**:** ***Jogos Estáticos***, ou de movimento simultâneo, e ***Jogos Dinâmicos,*** ou sequenciais, de movimentos sucessivos.

- Quanto ao valor associado ao processo de decisão:
  - ***Jogos de Soma Nula***, quando o ganho total dos jogadores para cada combinação de estratégias é nulo (no caso de dois jogadores o que um ganha é igual ao que o outro perde);

- ***Jogos de Soma Constante,*** quando o ganho total a repartir pelos jogadores é sempre igual para qualquer combinação de estratégias (por exemplo, no caso de um duopólio se a quota de mercado a repartir pelos dois competidores não se alterar);

- ***Jogos de Soma Não-Constante,*** nos casos contrários.

Obs. O exemplo mais conhecido de um jogo de duas pessoas de soma não constante é o *Dilema do Prisioneiro.*

- Quanto à relação entre os jogadores: ***Jogos Não-Cooperativos***, onde não existe associação nem colaboração entre os jogadores e ***Jogos Cooperativos***, onde esse tipo de relação pode existir, formando-se coalizões.

De forma sintética, num jogo tem-se:

- ***Jogadores*** (n): $P_1, P_2 \dots P_n$

- ***Estratégias*** : S_1 $-$ conjunto das estratégias do jogador P_1;
  S_2 $-$ conjunto das estratégias do jogador P_2;
  …
  S_n $-$ conjunto das estratégias do jogador P_n;

- ***Função de Ganhos*** (Payoff) dos jogadores: $L_1, L_2 \dots L_n$ (função das estratégias dos jogadores);

- ***Jogo:*** $J(P_1, \dots, P_n; S_1, \dots, S_n; L_1, \dots, L_n)$

3. Exemplos

Exemplo 1. A Alice e a Laura têm ambas duas moedas, uma moeda de *1€* e outra de *2€*. Cada uma vai escolher uma das moedas e mostrá-la em simultâneo. Se forem iguais, a Alice fica com as duas; se forem diferentes, serão as duas para a Laura.

Representação Bi-matricial (2 jogadores) do Jogo:

		Laura *E1*	Laura *E2*
Alice	***E1***	**(+1; -1)**	**(-1; +1)**
Alice	***E2***	**(-2; +2)**	**(+2; -2)**

Matriz de ganhos dos dois jogadores;
Jogo de duas pessoas de soma nula, estático, finito, não-cooperativo, com informação completa:

Como o jogo é de soma nula, pode apresentar-se apenas a matriz de um dos jogadores, por exemplo Alice – jogador-linha – visto que os ganhos de um são iguais às perdas (simétrico dos ganhos) do outro. Representação Matricial dos ganhos da Alice (perdas da Laura):

		Laura *E1*	Laura *E2*
Alice	***E1***	**+1**	**-1**
Alice	***E2***	**-2**	**+2**

Matriz de ganhos do Jogador 1, ou jogador-linha (Alice**)**
Matriz de perdas do jogador 2, ou Jogador-coluna (Laura)

A **Representação** na forma **Normal** ou **Estratégica:**

Jogadores: Alice (jogador 1) e Laura (jogador 2): {Alice, Laura}
Estratégias: Mostrar a moeda de 1€ (*E1*) e mostrar a moeda de 2€ (*E2*): {*E1; E2} = {1€;* 2€} para cada jogador;
Função de Ganhos:

$$L_1(1;1) = +1;\ L_1(2;1) = -2 \quad L_1(1;2) = -1 \quad L_1(2;2) = +2$$

$$L_2(1;1) = -1 \quad L_2(2;1) = +2; \quad L_2(1;2) = +1 \quad L_2(2;2) = -2$$

Exemplo 2. No período das 20:00 horas às 21:00 horas, duas estações televisivas (TV1 e TV2) disputam uma audiência de 100 milhões de espectadores. As duas estações têm de anunciar em simultâneo que programa vão exibir nesse período. As escolhas possíveis para cada estação de TV e o número respectivo de espectadores para cada escolha são (representação bi-maticial):

		TV2		
		Wes.(1)	Nov(2)	Com(3)
TV1	Wes(1)	(35; 65)	(15; 85)	(60; 40)
	Nov(2)	(45; 55)	(58; 42)	(50; 50)
	Com(3)	(38; 62)	(14; 86)	(70; 30)

Matrizes de ganhos dos 2 jogadores;
Jogo de duas pessoas de soma constante, estático, finito, não-cooperativo, com informação completa.

Como o jogo é de soma constante, pode apresentar-se apenas a matriz de um dos jogadores, por exemplo TV1 – jogador-linha – visto que os ganhos de um são iguais à constante menos os ganhos do outro (representação matricial do jogador 1):

		TV2		
		Wes.(1)	Nov(2)	Com(3)
TV1	Wes(1)	35	15	60
	Nov(2)	45	58	50
	Com(3)	38	14	70

Matriz de ganhos do jogador 1, ou jogador-linha (TV1)

Exemplo 3 (Dilema do prisioneiro). Dois indivíduos suspeitos, A e B, foram seguidos pela polícia e capturados na posse de uma grande quantidade de notas falsas, o que por si dá uma pena de prisão de 1 ano. No entanto, existem fortes suspeitas de que os mesmos façam parte da direcção que lidera uma rede para produzir as notas falsas. Foram apresentados ao juiz que considera prova suficiente se houver a confissão de um deles no envolvimento da produção. Neste caso a pena normal é de 12 anos. No interrogatório o Juiz diz a cada um dos prisioneiros o seguinte: “Se apenas você confessar e testemunhar contra o seu parceiro, ficará livre e o seu parceiro terá uma pena (normal) de 12 anos de prisão. Isto é, em troca da sua colaboração, anulo-lhe a pena. Mas se confessarem ambos, a pena é apenas reduzida para 5 anos.

		Prisioneiro B	
		Confesso	Nego
Prisioneiro A	Confesso	(-5; -5)	(0; -12)
	Nego	(-12; 0)	(-1; -1)

Matrizes de ganhos dos dois jogadores;

Jogo de duas pessoas de soma não-constante, estático, finito, com informação completa.

Exemplo 4 (Jogo da poluição). Considerem-se duas siderurgias, uma nacional e outra externa, com duas estratégias cada uma, montar um equipamento que permite produzir com baixa poluição ou não montar esse equipamento. Os lucros obtidos em cada caso constam do quadro abaixo, e dependem para cada empresa da sua estratégia e da estratégia do seu concorrente:

		Siderurgia Nacional	
		Baixa Pol.	Alta Pol.
Siderurgia	Baixa Poluição	A(100; 100)	B(-30; 120)
Externa	Alta Poluição	C(120; -30)	D(100; 100)

Matrizes de ganhos dos dois jogadores;

Jogo de duas pessoas de soma Não Constante, estático, finito, com informação completa.

4. Jogos de Duas Pessoas (*2-Pessoas*) de Soma Nula

Características dos Jogos de duas pessoas de soma nula:

- Dois jogadores, Jogador-linha e Jogador-coluna;
- O Jogador-linha deve escolher ***1*** de entre ***m*** estratégias. Ao mesmo tempo, o Jogador-coluna deve escolher ***1*** de entre ***n*** estratégias;
- Quando o jogador-linha escolhe a ***i-ésima*** estratégia e o jogador-coluna escolhe a ***j-ésima*** estratégia, o jogador-linha recebe (ganha) o valor $\boldsymbol{a_{ij}}$ e o jogador-coluna perde igual montante (ganha $-\boldsymbol{a_{ij}}$).

Representação matricial do Jogo

				Jogador Coluna		
		Est. 1	…	Est. j	…	Est. n
	Est. 1	a_{11}	…	a_{1j}	…	a_{1n}
	…	…		…		…
Jogador Linha	Est. i	a_{i1}	…	a_{ij}	…	a_{in}
	…	…		…		…
	Est. m	a_{m1}	…	a_{mj}	…	a_{mn}

Matriz de ganhos do jogador-linha

Matriz de perdas do jogador-coluna

A soma dos ganhos dos dois jogadores para cada par de estratégias é nula.

Dois jogadores com interesses conflituais. Neste jogo não há cooperação possível (o que um ganha o outro perde). Neste caso o jogo diz-se *estritamente competitivo.*

Hipóteses básicas dos jogos de soma nula:

- Cada jogador escolhe o melhor que pode, dado que o seu opositor sabe qual é a sua melhor estratégia (esta hipótese deixa de ser válida se o jogo não for de informação completa);
- Ambos os jogadores são racionais.

5. Solução de um Jogo de *2-Pessoas* de Soma Nula

5. 1 Estratégias Puras

Exemplo 5. Considere-se um jogo de soma nula cuja matriz de ganhos do Jogador-linha é a seguinte:

Estratégias do Jogador Coluna

Estratégias do Jogador Linha		1	2	3	4	Min da linha	Máx (Min da linha)
	1	4	5	5	8	4	
	2	6	7	6	9	6	6
	3	5	7	5	4	4	
	4	6	6	5	5	5	
Máx da coluna		6	7	6	9		
Min(Máx da coluna)		6		6			

Máx (Min da linha) = Min(Máx da coluna) = 6 $= a_{21}$ **=** a_{23}

Se jogador-linha escolhe 1, jogador-coluna escolhe 1, perdendo este o mínimo, e assim sucessivamente.

Igualmente, se jogador-coluna escolhe 1, o jogador-linha escolhe 2 ou 4, ganhando este o máximo, e assim sucessivamente.

Sendo ambos racionais, jogador-linha escolhe 2 e o jogador-coluna escolhe 1 ou 3. Jogador-linha assegura 6, maximizando o seu ganho mínimo, e jogador-coluna perde 6, minimizando a sua perda máxima. O jogador-linha é o **jogador maximizante** e o jogador-coluna é o **jogador minimizante**.

Quando existe equilíbrio, como o descrito, diz-se que o jogo tem ***ponto de sela*** em estratégias puras**.** Neste caso tem dois pontos de sela. O valor comum, 6, é o ***valor do jogo*,** ganho do jogador-linha e perda do jogador-coluna.

O ponto de sela é um ponto de equilíbrio, ou solução do jogo**,** pois nesse ponto nenhum jogador pode beneficiar de uma mudança unilateral de estratégia. Se existir mais do que um, têm todos o mesmo valor, isto é, existe equivalência nos pontos de sela. Um jogo com ponto de sela com valor nulo é dito um ***jogo equitativo***.

Um jogo de 2 pessoas, em que a uma se oferecem ***m*** alternativas e à outra ***n*** alternativas diz-se um ***Jogo Rectangular***. Cada alternativa é uma estratégia simples ou pura.

Genericamente, diz-se que o jogo tem ponto de sela em estratégiass puras quando existe um valor $\boldsymbol{v}$ ***(valor do jogo)***, tal que

$$\underset{i}{Max}\ \underset{j}{min}\, a_{ij} = \underset{j}{Min}\ \underset{i}{max}\, a_{ij} = a_{i_0 j_0} = v \qquad (2.1)$$

Sendo $\boldsymbol{v}$ o valor recebido pelo jogador-linha ($\mathbf{1}$) e o valor pago pelo jogador-coluna ($\mathbf{2}$). O valor $\boldsymbol{v}$ o é melhor que os dois jogadores conseguem, sendo $\boldsymbol{i_0}$ estratégia óptima para o **jogador** $\mathbf{1}$, e $\boldsymbol{j_0}$ a estratégia óptima para o **jogador** $\mathbf{2}$.

5. 2 Estratégias Mistas

Considere-se novamente exemplo 1, jogo das moedas envolvendo a Alice e a Laura, cuja matriz (ganhos da Alice) é:

		Laura			
		E1	**E2**	Min da linha	Máx (Min da linha)
Alice	**E1**	**+1**	**-1**	**-1**	**-1**
	E2	**-2**	**+2**	**-2**	
Máx da coluna		**+1**	**+2**		
Min(Máx da coluna)		**+1**			

$$\underset{i}{Max}\ \underset{j}{min}\, a_{ij} = -1 < +1 = \underset{j}{Min}\ \underset{i}{max}\, a_{ij}$$

Aliás, é fácil de provar que se tem sempre $\underset{i}{Max}\ \underset{j}{min}\, a_{ij} \leq \underset{j}{Min}\ \underset{i}{max}\, a_{ij}$. Quando $\underset{i}{Max}\ \underset{j}{min}\, a_{ij} < \underset{j}{Min}\ \underset{i}{max}\, a_{ij}$ diz-se que neste caso o *jogo não tem ponto de sela* (em estratégias puras).

Se a Alice optar pela estratégia 1, a Laura opta pela estratégia 2, o que leva a Alice a escolher a estratégia 2, e assim sucessivamente. Isto é, neste jogo as estratégias não são estáveis, pois para qualquer escolha há um jogador que pode beneficiar trocando unilateralmente a sua estratégia. Neste caso, o jogo apenas tem solução em estratégias mistas.

O valor do jogo, para cada jogador, é o valor esperado obtido com uma combinação de estratégias, em que a cada estratégia é associada uma probabilidade, ou frequência, no caso de um processo repetitivo, com que a mesma é escolhida.

Defina-se, para este exemplo, o seguinte:

x_1 - probabilidade de a Alice utilizar a estratégia 1

x_2 - probabilidade de a Alice utilizar a estratégia 2

y_1 - probabilidade de a Laura utilizar a estratégia 1

y_2 - probabilidade de a Laura utilizar a estratégia 2

Sendo $x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 = 1$ e $y_1 + y_2 = 1.$

Um par $(x_1,\ x_2)$ é uma *estratégia mista (*combinada ou aleatorizada) para a Alice. Similarmente, um par $(y_1,\ y_2)$ é uma *estratégia mista* para a Laura. Genericamente, qualquer estratégia mista $(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_m)$ para o jogador-linha é uma estratégia pura se algum x_i é igual a $\mathbf{1}$.

De igual forma para o jogador-coluna, se algum $\boldsymbol{y_j}$ for igual a **1**. Assim, uma estratégia pura é um caso particular de uma estratégia mista em que o jogador escolhe sempre a mesma estratégia.

Para o Jogador-linha, jogador maximizante, este deve escolher valores para $(\boldsymbol{x_1},\ \boldsymbol{x_2}, \dots,\ \boldsymbol{x_m})$ de modo a *Maximizar o seu Ganho Esperado,* na hipótese em que que o Jogador-coluna conhece também os valores de $(\boldsymbol{x_1},\ \boldsymbol{x_2}, \dots,\ \boldsymbol{x_m})$.

Um jogo de soma nula cuja matriz para um dos jogadores é uma matriz anti-simétrica $(\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A^T})$ é chamado um ***jogo simétrico.*** Prova-se que um jogo simétrico tem valor nulo, e que uma estratégia óptima para um dos jogadores é também estratégia óptima para o outro.

Exemplo. Um exemplo conhecido de jogo simétrico é o jogo de crianças designado por “tesoura, pedra e papel” (*scissors, stone and paper*), em que um jogador ganha 1€ de acordo com a seguinte regra: tesoura corta papel, papel cobre pedra e pedra parte tesoura. Neste caso a matriz do jogo é a seguinte:

	Tesoura	Papel	Pedra
Tesoura	0	+1	-1
Papel	-1	0	+1
Pedra	+1	-1	0

Este jogo só tem ponto de equilíbrio em estratégias mistas. Como o valor do jogo é nulo, o mesmo pode ser obtido resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} -x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 \qquad - x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 \qquad &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

cuja solução é (1/3; 1/3; 1/3), com $v = 0$.

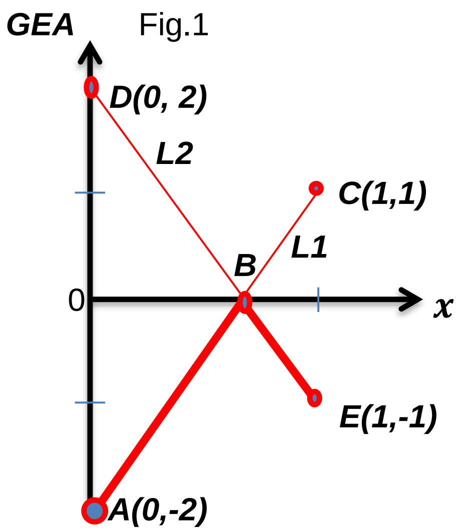
5.3 Solução Gráfica

Retome-se o exemplo 1. Seja $(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2})$ = $(\boldsymbol{x}, \mathbf{1}-\boldsymbol{x})$ a estratégia mista da Alice.

Ganho Esperado da Alice (GEA) quando a Laura escolhe Estratégia 1 (L1): $+(+\mathbf{1})\boldsymbol{x} + (\text{-}\mathbf{2})(\mathbf{1}-\boldsymbol{x}) = \mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{2}$

Ganho Esperado da Alice (GEA) quando a Laura escolhe Estratégia 2 (L2): $(-\mathbf{1})\boldsymbol{x} + (+\mathbf{2})(\mathbf{1}-\boldsymbol{x}) = -\mathbf{3}\,\boldsymbol{x} + \mathbf{2}$

Representação gráfica:



$\overline{AC}$ - Ganho esperado da Alice quando Laura escolhe mostrar 1€
$\overline{DE}$ - Ganho esperado da Alice quando Laura escolhe mostrar 2€

Uma vez que Laura conhece o valor de x, ela escolhe a estratégia (1€ ou 2€) que torna o ganho de Alice mínimo. Isto é, o ganho esperado da Alice é dado pela ordenada em ***ABE***. Como a Alice pretende maximizar o seu ganho, ela escolhe x correspondente ao ponto ***B***, isto é, na intersecção de $\overline{AC}$ com $\overline{DE}$, ou seja no ponto $x = 2/3$, que resulta da resolução da equação $3x - 2 = -3x + 2$

A estratégia da Alice é então $(x_1, x_2) = (x, 1 - x) =$ ***(2/3; 1/3)***, e o seu ganho esperado é **zero**.

Utilizando um raciocínio semelhante, podemos determinar a estratégia da Laura, ou considerando a sua matriz de ganhos (a matriz da Alice multiplicada por -1), ou utilizando a mesma matriz da Alice, mas considerando que Laura é jogador minimizante. Utilizemos esta última alternativa.

Seja $(y_1, y_2) = (y, 1 - y)$ a estratégia mista da Laura

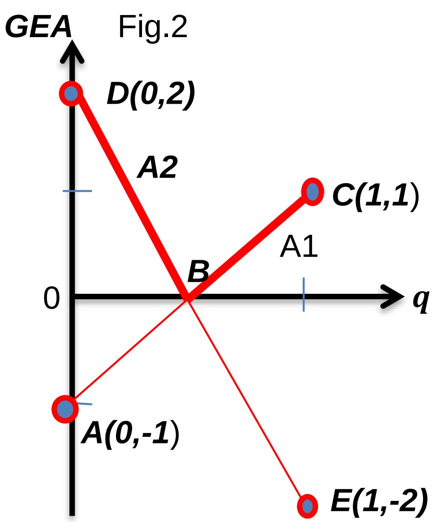
Ganho Esperado da Alice (GEA)quando ela escolhe Estratégia 1 (A1) (e a Laura escolhe a estratégia $(y, 1 - y)$**) :**

$$(+1)y + (-1)(1 - y) = 2y - 1$$

Ganho Esperado da Alice (GEA)quando ela escolhe Estratégia 2 (A2) (e a Laura escolhe a estratégia $(y, 1 - y)$**) :**

$$(-2)\,y + (+2)(1 - y) = -4y + 2$$

Representação gráfica:



$\overline{\mathbf{AC}}$- Ganho esperado da Alice (perda da Laura) quando ela escolhe mostrar 1€
$\overline{\mathbf{DE}}$- Ganho esperado da Alice (perda da Laura) quando ela escolhe mostrar 2€

Uma vez que Alice conhece o valor de $\boldsymbol{y}$, ela escolhe a estratégia (1€ ou 2€) que torna o seu ganho máximo. Isto é, o ganho esperado da Alice é dado pela coordenada em DBC. Como a Laura pretende minimizar o ganho da Alice, ela escolhe $\boldsymbol{y}$ correspondente ao ponto B, isto é, na intersecção de $\overline{\boldsymbol{AC}}$ com $\overline{\boldsymbol{DE}}$, ou seja no ponto $\boldsymbol{y} = 1/2$, que resulta da resolução da equação $2\boldsymbol{y} -1 = -\mathbf{4}\boldsymbol{y} + \mathbf{2}$

A estratégia da Laura é então $(\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}) = (\boldsymbol{y}, \mathbf{1} - \boldsymbol{y})$ = ***(1/2; 1/2)***, e a sua perda esperada (ganho da Alice) é **zero**.

O valor do Jogo (ganho da Alice= perda da Laura) é dado por $\boldsymbol{v}$ = (+1)*2/3 *1/2 + (-1)*)*2/3 *1/2+(-2)*1/3*1/2+(+2)*1/3*1/2=0

Esquematicamente, vem:

Estratégia mista da Alice	Laura pode escolher	Ganho Esperado da Alice (Perda da Laura)
$\boldsymbol{x_1} < \mathbf{2/3}$	mostrar **2 €**	**< 0** (segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$ na Fig.1)
$\boldsymbol{x_1} > \mathbf{2/3}$	mostrar **1 €**	**< 0** (segmento $\overline{\boldsymbol{BE}}$ na Fig.1)

Estratégia mista da Laura	Alice pode escolher	Ganho Esperado da Alice (Perda da Laura)
$\boldsymbol{y_1} < \mathbf{1/2}$	mostrar **2 €**	**> 0** (segmento $\overline{\boldsymbol{DB}}$ na Fig.2)
$\boldsymbol{y_1} > \mathbf{1/2}$	mostrar **1 €**	**> 0** (segmento $\overline{\boldsymbol{BC}}$ na Fig.2)

6. Programação Linear e Jogos de Soma Nula

Quando o nº de estratégias que cada jogador pode escolher é superior a dois, a representação gráfica deixa de ser possível. No entanto, para o Jogador-linha, a solução do jogo pode ser encontrada através da Programação Linear, resolvendo o seguinte problema:

$$\underset{x_i}{Max}\{\min(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i, \dots, \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i)\}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \qquad (2.2)$$

$$x_i \geq 0; \;\; i = 1, 2, \dots, m$$

Fazendo $v = min(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i, \dots, \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i)$, sabe-se que

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i \geq v, \dots, \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i \geq v$$

Então, o problema anterior pode transformar-se no problema de PL a seguir, em que se pretende determinar $v, \; x_1, x_2, \dots, x_m$:

$$Max\; z = v$$

s.a.:

$$-\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i + v \leq 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \qquad (2.3)$$

$$v\; livre; x_i \geq 0; \;\; i = 1, 2, \dots, m\, ; \;\; j = 1, 2, \dots, n \qquad (m + 1\; variáveis\; e\; n + 1\; restrições)$$

.

O valor de v, sendo o mínimo que o jogador-linha espera receber, será uma *base (floor)* para o seu ganho

Para o Jogador-coluna procede-se de modo semelhante:

$$\underset{y_j}{Min}\{\max(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_j)\}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \qquad (2.4)$$
$$y_j \geq 0;\ j = 1, 2, \dots, n$$

Fazendo $w = \max(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_j)$, sabe-se que

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j \leq w, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_i \leq w$$

vindo então para o Jogador-coluna o seguinte problema de PL, em que se pretende determinar $w, y_1, y_2, \dots, y_n$

$$Min\ z = w$$

s.a.:

$$-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j + w \geq 0$$
$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \qquad (2.5)$$
$$w\ livre; y_j \geq 0;\ i = 1, 2, \dots, m\ ;\ j = 1, 2, \dots, n \quad (n + 1\ variáveis\ e\ m + 1\ restrições)$$

O valor de w, sendo o máximo que o jogador coluna espera perder, será um *tecto (ceiling)* para a sua perda.

É fácil de verificar que (2.5) é o dual de (2.3), e que a resolução de um dos problemas permite obter as estratégias óptimas para ambos os jogadores, dadas pelas soluções *primal* e *dual*. Essa garantia é dada pelo *Teorema fundamental da Teoria dos Jogos*.

Designando por $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ o ganho esperado do jogador-linha quando ele utiliza a estratégia $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_m})$ e o jogador-coluna utiliza a estratégia $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, e por $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a_{ij}}]$ a matriz, $\boldsymbol{m}$x$\boldsymbol{n}$, de ganhos do jogador linha, tem-se então:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \sum_{i}^{m}\sum_{j}^{n} \boldsymbol{a_{ij}}\,\boldsymbol{x_i}\boldsymbol{y_j} = \boldsymbol{XAY^T} \qquad (2.6)$$

Se para algum $\boldsymbol{X}^* = (\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*, \dots \boldsymbol{x}_m^*)$ e algum $\boldsymbol{Y}^* = (\boldsymbol{y}_1^*, \boldsymbol{y}_2^*, \dots \boldsymbol{y}_n^*)$ se verifica a condição

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}^*) \le \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}^*,\boldsymbol{Y}^*) \le \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}^*,\boldsymbol{Y})$$

Quaisquer que sejam $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$, então $\boldsymbol{X}^*$ e $\boldsymbol{Y}^*$ são estratégias óptimas para o Jogador-linha e Jogador-coluna, respectivamente, e o par $(\boldsymbol{X}^*,\boldsymbol{Y}^*)$ uma solução do jogo e $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}^*,\boldsymbol{Y}^*)$ o seu valor. O par (X^*,Y^*) constitui um ponto de sela da função $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$**,** e diz-se que o jogo tem ponto de sela em estratégias mistas. Esta solução é obtida resolvendo o problema de PL atrás, e este tem sempre solução óptima, de acordo com o teorema fundamental, ou *teorema do Minimax de Von Neumann*.

Também nos jogos em que existem estratégias mistas, prova-se facilmente que $\underset{\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{Max}}\ \underset{\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{min}}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \le \underset{\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{Min}}\ \underset{\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{max}}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$

Apresenta-se agora o teorema fundamental da Teoria dos Jogos, ou Teorema do Minimax, devido a John von Neumann.

Teorema fundamental da Teoria do dos Jogos. *Num jogo de duas pessoas de soma nula existem sempre uma solução em estratégias mistas, o que que significa que existem estratégias mistas,* $\boldsymbol{X}^* = (\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*, \dots \boldsymbol{x}_m^*)$ *e* $\boldsymbol{Y}^* = (\boldsymbol{y}_1^*, \boldsymbol{y}_2^*, \dots \boldsymbol{y}_n^*)$, *para o primeiro e segundo jogador, respectivamente, tal que*

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}^*) \leq \boldsymbol{v} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{Y}^*) \leq \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{Y}) \tag{2.7}$$

Este teorema permite ainda concluir que $\underset{\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{Max}}\ \underset{\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{min}}\, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \underset{\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{Min}}\ \underset{\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{max}}\, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$

A demonstração deste teorema pode fazer-se notando que (2.5) tem sempre solução limitada, isto é, o conjunto das soluções admissíveis é não vazio e é um poliedro convexo, e utilizando os resultados da dualidade.

Exemplo 6 (Jogo conhecido por *Morra*, muito difundido entre os italianos). Dois jogadores jogam um jogo que consiste em levantar simultaneamente um ou dois dedos. Cada jogador quando levanta os dedos deve anunciar simultaneamente o nº de dedos que palpita (prevê) que o seu adversário vai levantar. Se nenhum ou ambos adivinham os dedos levantados pelo adversário, então o jogo fica empatado. Nos outros casos, o jogador que adivinha correctamente ganha (perda do adversário) uma soma em euros correspondente ao total dos dedos levantados pelos dois jogadores.

A matriz de ganhos do jogador 1, jogador-linha, é a seguinte:

		Jogador 2			
		(1; 1)	(1; 2)	(2; 1)	(2; 2)
Jogador 1	(1; 1)	0	2	-3	0
	(1; 2)	-2	0	0	3
	(2; 1)	3	0	0	-4
	(2; 2)	0	-3	4	0

Este jogo, como se verifica, não tem ponto de sela em estratégias puras, pois $\boldsymbol{\underset{i}{Max}\ \underset{j}{min}\, a_{ij} = -2 < +2 = \underset{j}{Min}\ \underset{i}{max}\, a_{ij}}$. O modelo de PL para determinar as estratégias óptimas é o seguinte:

$$\begin{cases} Max\ v \\ +0x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 0x_4 + v \leq 0 \\ -2x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 3x_4 + v \leq 0 \\ +3x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 4x_4 + v \leq 0 \\ +0x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 0x_4 + v \leq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_i \geq 0, v\ livre \end{cases}$$

Para contornar a restrição de sinal de $\boldsymbol{v}$, que é uma variável livre, podemos somar a todos os elementos da matriz original (da página anterior) o simétrico do seu mínimo, isto é, +4, e $\boldsymbol{v}$ passa a ser também uma variável não negativa, como exige a aplicação do algoritmo do simplex. Alternativamente, como este jogo é simétrico, o seu valor $\boldsymbol{v}$ é nulo, podendo esta variável ser assumida não negativa no processo de resolução pelo simplex.

A solução encontrada para o primal é: $\boldsymbol{x_1^* = 0}$; $\boldsymbol{x_2^* = 0,6}$; $\boldsymbol{x_3^* = 0,4}$; $\boldsymbol{x_4^* = 0}$; $\boldsymbol{v^* = 0}$. Ou seja, o jogador 1 deve utilizar com probabilidade 0,6 a estratégia 2 (levantar um dedo e prever 2 dedos no opositor) e com probabilidade 0,4 a estratégia 3 (levantar 2 dedos e prever 1 dedo para o opositor), e com isso o seu resultado esperado é igual a zero. Se o jogo se repetir, deverá utilizar 60% das vezes a estratégia 2 e 40% das vezes a estratégia 3, embora nunca informando o opositor, das suas intenções, qual a estratégia concreta que vai utilizar em cada experiência.

A solução do dual é: $\boldsymbol{y_1^* = 0}$; $\boldsymbol{y_2^* = 0,6}$; $\boldsymbol{y_3^* = 0,4}$; $\boldsymbol{y_4^* = 0}$; $\boldsymbol{w^* = 0}$, isto é, a estratégia óptima do jogador coluna é semelhante. Trata-se de um jogo equitativo, pois o ganho esperado para cada jogador é nulo.

7. Jogos de Duas pessoas de Soma Constante

É um jogo entre duas pessoas em que qualquer que seja a estratégia de cada jogador o ganho de um é diferente da perda do outro, podendo ambos ganhar, ou perder, sendo, no entanto, a soma dos seus ganhos uma constante de valor **c.**

Desde logo se verifica que os jogos de soma nula são um caso particular dos jogos de soma constante, caso em que a **constante é zero**.

Tal como no jogo de duas pessoas de soma nula, continua a haver conflito entre os jogadores, **não sendo possível a cooperação**, uma vez que o ganho de uma unidade de qualquer deles irá traduzir-se numa perda de igual montante para o seu opositor.

Em geral, as estratégias óptimas e o valor do jogo para os dois jogadores podem ser encontrados pelos mesmos métodos utilizados para determinar as estratégias óptimas e o valor do jogo para os jogos de duas pessoas de soma nula. Por isso não serão objecto de tratamento especial. De notar que o valor do jogo para cada um dos jogadores é a constante menos o valor do jogo para o adversário.

Retome-se a matriz de ganhos do Jogador-linha (TV1) do exemplo 2:

		TV2				
		Wes.(1)	Nov(2)	Com(3)	Min da linha	Máx (Min da linha)
	Wes(1)	35	15	60	15	
TV1	Nov(2)	45	58	50	45	45
	Com(3)	38	14	70	14	
Max da linha		45	58	70		
Min da coluna		45				

Neste caso $\boldsymbol{\underset{i}{Max}\ \underset{j}{min}\, a_{ij} = \underset{j}{Min}\ \underset{i}{max}\, a_{ij} = a_{21} = 45}$. Este jogo tem ponto de sela em estratégias puras. O valor do jogo para a TV1 é 45 e para a TV2 é 55 (100-45) milhões de espectadores.

Exemplo 7. Duas companhias, A e B, em sistema de duopólio, vendem 2 marcas de vacina para a gripe. Ambas as companhias anunciam na rádio, televisão, jornais e através de brochuras pelo correio. Dependendo da eficácia da campanha, cada companhia pode capturar ou perder quota de mercado da outra. Estima-se que a % de mercado da companhia A para cada par de estratégias, sua e da companhia B, é a seguinte (%):

Empresa B

Empresa A

	Rádio	TV	Jornais	Brochura
Rádio	50	52	47	50
TV	48	50	50	53
Jornais	53	50	50	46
Brochura	50	47	54	54

Note-se que é um jogo de soma constante, com a soma das quotas de mercado igual a 100%. A matriz de ganhos da empresa B obtém-se subtraindo a matriz anterior da matriz, da mesma ordem, cujos elementos são 100.

Neste caso $\boldsymbol{\underset{i}{Max}\ \underset{j}{min}\, a_{ij} = a_{21} = 48 < 52 = a_{12} = \underset{j}{Min}\ \underset{i}{max}\, a_{ij}}$, ou seja o jogo não tem ponto de sela em estratégias puras. O modelo de PL para calcular a estratégia ótptima da Empresa A é o seguinte:

$$\begin{cases} Max\ v \\ -50x_1 - 482x_2 - 53x_3 - 50x_4 + v \leq 0 \\ -52x_1 - 50x_2 - 50x_3 - 47x_4 + v \leq 0 \\ -47x_1 - 50x_2 - 50x_3 - 54x_4 + v \leq 0 \\ -50x_1 - 53x_2 - 46x_3 - 54x_4 + v \leq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_i \geq 0, v\ \geq 0 \end{cases}$$

Neste caso, verifica-se que $\boldsymbol{v}$, o valor do jogo para a empresa A, é sempre não negativo (aliás, é uma quota de mercado), pelo que o valor assumido por esta variável é não negativo. A resolução, através do simplex, indica que a empresa A deve dedicar 60% do seu esforço (orçamento) através da TV (estratégia 2) e 40% através dos jornais (estratégia 3), sendo o valor do jogo para ela, isto é, a quota de mercado esperada, igual a 50%.

Também aqui a solução do dual pode ser utilizada para indicar a estratégia óptima da Empresa B, que neste caso é semelhante, isto é, 60% via TV e 40% através dos jornais. Se resolvermos apenas o problema primal, o valor do jogo para a Empresa B deve ser a constante (100%) menos o valor da função objectivo do primal (50%), havendo neste caso coincidência. A resolução directa do problema da empresa B dá, evidentemente, os mesmos resultados.

8. Estratégias Dominadas

Considere-se o **Exemplo 8**:

J. Coluna

J. Linha

	E1	E2
E1	-1	-1
E2	-1,5	0
E3	0,5	0
E4	0	1

Verifica-se que a estratégia 2 será sempre preterida em relação à estratégia 3. Diz-se então que a estratégia 2 é dominada pela estratégia 3. De igual modo a estratégia 2 é dominada pela estratégia 4, tal como a estratégia 1 é dominada, quer pela estratégia 3 quer pela estratégia 4. Deste modo, as estratégias 1 e 2 podem em ser eliminadas, ficando então a matriz:

J. Coluna

J. Linha

	E1	E2
E1	0,5	0
E2	0	1

Solução, obtida graficamente:

$\boldsymbol{x_1^*} = \frac{2}{3}$; $\boldsymbol{x_2^*} = \frac{1}{3}$; $\boldsymbol{y_1^*} = \frac{2}{3}$; $\boldsymbol{y_2^*} = \frac{1}{3}$;

valor do jogo para o Jogador linha, $\boldsymbol{v} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

Em geral, uma estratégia diz-se dominante para um jogador se ela é a melhor para esse jogador independentemente da estratégia do outro jogador. Para um jogo de duas pessoas, em que o jogador-linha dispõe das estratégia $\boldsymbol{s_1, \dots, s_k, \dots, s_l, \dots, s_m}$, diz-se que a estratégia $\boldsymbol{s_l}$ é dominada pela estratégia $\boldsymbol{s_k}$ se independentemente da estratégia do adversário se verifica $\boldsymbol{a_{kj}} \geq \boldsymbol{a_{lj}}$, e $\boldsymbol{a_{kj}} > \boldsymbol{a_{lj}}$ em pelo menos um $\boldsymbol{j}$, qualquer que seja $\boldsymbol{j = 1 \dots, n}$, em que $[a_{ij}]$, com $\boldsymbol{i = 1, \dots, m}$ **e** $\boldsymbol{j = 1 \dots, n}$, é a matriz de ganhos do jogador linha. Quando $\boldsymbol{a_{kj} > a_{lj}}$, para todo $\boldsymbol{j = 1 \dots, n}$, diz-se que a estrtégia $\boldsymbol{s_l}$ é dominada estritamente pela estratégia $\boldsymbol{s_k}$. Assim, $\boldsymbol{s_k}$ é estritamente melhor do que $\boldsymbol{s_l}$. *Mutatis mutantis*, para o jogador coluna.

No caso geral de um jogo de ***n*-Pessoas**, de soma constante ou não constante, sejam $\boldsymbol{S_1, S_2, \dots S_n}$ o conjunto das estratégias e $\boldsymbol{L_1, L_2 \dots L_n}$ o conjunto da funções de ganhos dos jogadores ***1, 2,… n,*** respectivamente, e $\boldsymbol{s_i^k, s_i^l} \in \boldsymbol{S_i}$, duas estratégias admissíveis para o jogador $\boldsymbol{i}$. A estratégia $\boldsymbol{s_i^l}$ é ***estritamente dominada*** pela estratégia $\boldsymbol{s_i^k}$ se

$$\boldsymbol{L_i(s_1, \dots s_{i-1}, s_i^k, s_{i+1}, \dots, s_n) > L_i(s_1, \dots s_{i-1}, s_i^l, s_{i+1}, \dots, s_n)} \qquad (2.8)$$

para todo o $\boldsymbol{s_1} \in \boldsymbol{S_1} \dots \boldsymbol{s_{i-1}} \in \boldsymbol{S_{i-1}}$, $\boldsymbol{s_{i+1}} \in \boldsymbol{S_{i+1}}, \dots, \boldsymbol{s_n} \in \boldsymbol{S_n}$

Por outro lado, estratégia $\boldsymbol{s_i^l}$ é ***fracamente dominada*** pela estratégia $\boldsymbol{s_i^k}$ se

$$\boldsymbol{L_i(s_1, \dots s_{i-1}, s_i^k, s_{i+1}, \dots, s_n) \geq L_i(s_1, \dots s_{i-1}, s_i^l, s_{i+1}, \dots, s_n)} \text{ (não todos =)} \qquad (2.9)$$

para todo o $s_1 \in \boldsymbol{S_1} \dots s_{i-1} \in \boldsymbol{S_{i-1}}$, $s_{i+1} \in \boldsymbol{S_{i+1}}, \dots, s_n \in \boldsymbol{S_n}$

9. Jogos de Duas Pessoas de Soma Não-Constante

Enquanto nos jogos *de 2-Pessoas* de soma constante a cooperação está sempre afastada, neste caso isso não é necessariamente verdade, podendo a eventual cooperação possibilitar melhores resultados para ambos os jogadores. Isto acontece em muitas situações, nomeadamente económicas, pois a concorrência nem sempre implica um conflito total, podendo haver criação ou destruição de valor no processo concorrencial. Por isso podemos ter um ponto de equilíbrio (ou solução do jogo) não cooperativo, ou uma solução resultante da cooperação entre os jogadores. O dilema do prisioneiro, o exemplo mais famoso dos jogos de *2-Pessoas* de soma não constante, ilustra bem este aspecto.

Dilema do Prisioneiro) (exemplo 3**)**

Pris.2

Pris.1		Confesso	Nego
	Confesso	**(-5; -5)**	**(0; -12)**
	Nego	**(-12; 0)**	**(-1; -1)**

Verifica-se claramente que a estratégia ***Nego (N)*** é (estritamente) dominada pela estratégia ***Confesso (C)***. Não havendo cooperação entre os jogadores (combinação prévia entre os prisioneiros), cada um, se for racional, deve escolher a estratégia Confesso. O ponto ***(C; C)* = *(-5; -5)*** é uma solução do jogo, sendo um *ponto de equilíbrio não-cooperativo,* neste caso o único. Como cada jogador escolhe a estratégia **C**onfesso independentemente da escolha do opositor, esta estratégia é dominante, para ambos, e o ponto de equilíbrio chama-se ***Equilíbrio Dominante*****.**

Claro que seria melhor para os prisioneiros negarem ambos, mas isso pressupunha cooperação entre eles, e seria um equilíbrio cooperativo. O resultado significativo neste caso é que ambos os prisioneiros ao agirem no interesse próprio e confessarem acabam por apanhar penas mais severas.

Se o jogo se repetisse indefinidamente, a solução seria ambos negarem; mas se isso não acontecer, isto é, o jogo for finito, cada um deles é tentado a confessar, para tirar vantagem dessa situação, e retorna-se ao ponto de equilíbrio anterior, ***(C; C).*** A não ser que algum seja altruísta (estamos a pressupor ser racional).

.

Este tipo de situação conduz-nos a um conceito mais geral de equilíbrio, que é ponto de equilíbrio de Nash, devido a John F. Nash, um matemático que ganhou o prémio Nobel da Economia pelos seus trabalhos na área da Teoria dos Jogos.

Definição. Tal como nos jogos de duas pessoas de soma nula, a escolha da estratégia para cada jogador é um ***ponto de equilíbrio* (de Nash)** se nenhum jogador pode beneficiar através de uma troca unilateral de estratégia. Portanto, todo o equilíbrio dominante é ponto de Nash, mas a reciproca não é verdadeira, como veremos mais à frente. O ponto de sela é, evidentemente, ponto de equilíbrio de Nash.

Na situação mais geral do mercado de concorrência perfeita temos um equilíbrio de Nash, ou equilíbrio não-cooperativo, em que cada empresa e consumidor tomam decisões, considerando como dados os preços de todos os outros, e ninguém melhora se mudar de posição.

É fácil de verificar que o ponto ***(N; N) = (-1; -1)*** não é um ponto de equilíbrio, pois qualquer dos jogadores ganhava em mudar de estratégia. Isto ilustra um aspecto particular do jogo tipo Dilema do Prisioneiro: se os jogadores cooperam (combinam negar), então cada jogador pode beneficiar se trair o oponente (assumindo que este mantém a sua estratégia). Devido á sua importância teórica, continuemos a caracterizar o dilema do prisioneiro, já que todos os jogos com esta estrutura são designados como tal, em microeconomia e em teoria dos Jogos.

Já vimos que num dilema do prisioneiro, se ambos são tentados a trair, ficam piores do que se tivessem cooperado e, por isso, caem no ponto ***(C; C) = (-5; -5).*** Esta anomalia nunca acontece num jogo de 2-Pessoas de soma nula. Em geral, tem-se no Dilema do Prisioneiro a seguinte matriz:

Pris.2

		Não Coopero	Coopero
Pris.1	**Não Coopero**	*(P; P)*	*(T; S)*
	Coopero	*(S; T)*	*(R; R)*

P – pena por não cooperar
S – pena (agravada) por ter sido traído
R – pena se ambos cooperarem
T – pena (perdoada) por ter traído

No dilema do prisioneiro tem-se ***T > R > P > S.*** Qualquer jogo de duas pessoas com esta característica é chamado um ***Dilema do Prisioneiro.***

Exemplo 9 (Batalha dos sexos). Um casal, João **(J)** e Maria **(M),** desejam ir passear à noite**.** O João prefere assistir a um jogo de futebol, mas a Maria prefere ir ao cinema. Se forem ambos ao futebol, o João tira maior prazer do passeio que a Maria. Se ambos forem ao cinema, então a mulher tira maior satisfação do que o homem. Se cada um for para seu lado, ficam ambos insatisfeitos. Considere-se a seguinte matriz com as respectivas medidas da utilidade do João e da Maria:

Maria

João		**Futebol (F)**	**Cinema (C)**
	Futebol (F)	(10; 5)	(0; 0)
	Cinema (C)	(0; 0)	(5; 10)

Verifica-se por simples inspecção que os pontos ***(F; F) = (10; 5)* e *(C; C) = (5; 10)*** são **pontos de equilíbrio de Nash.** Este exemplo tem dois pontos de equilíbrio. Este jogo não é um dilema do prisioneiro. Tem dois pontos de equilíbrio, mas não são equivalentes (o que não acontece nos jogos de soma nula). Neste caso, nenhuma das estratégias é dominante, o que ilustra que nem todos os pontos de equilíbrio de Nash são equilíbrios dominantes.

No exemplo do jogo da poluição, indicado atrás (exemplo 4), o ponto $\boldsymbol{D^*}$***(100; 100)*** é um ponto de equilíbrio de Nash. Apesar do ponto ***A(100; 100)*** possibilitar o mesmo lucro a ambas as siderurgias, este não é ponto de equilíbrio.

Sid. Nacional

Sid. Externa		**Baixa Poluição**	**Alta Poluição**
	Baixa Poluição	A(100; 100)	B(-30; 120)
	Alta Poluição	C(120; -30)	$\mathbf{D^*(100; 100)}$

Nesta situação, *o equilíbrio não-cooperativo, ou de Nash, diz-se não eficiente.* O Governo pode intervir, para corrigir a situação, forçando *equilíbrio cooperativo em A (100; 100),* onde os lucros até são os mesmos.

Neste caso as estratégias Alta Poluição são estratégias dominantes, cada uma dominante para cada jogador, tendo-se um equilíbrio dominante, embora gerando os mesmos resultados que o ponto *A(100; 100).*

Este exemplo, em Economia, é um caso em que o mecanismo da chamada “mão invisível” não funciona em benefício da sociedade como um todo, por isso se diz um *equilíbrio não eficiente.*

Citando Paul A. Samuelson (Economics, 2005), “Quando os equilíbrios de Nash se tornam perigosamente não eficientes, os governos podem tomar medidas. Ao estabelecerem regulações eficientes ou penalidades pela poluição, ou talvez estabelecendo (eficientes) direitos de propriedade, o governo pode induzir as empresas a deslocarem-se para o resultado A(100; 100), o mundo de «baixa poluição/baixa poluição». Nesse equilíbrio, as empresas têm o mesmo lucro que na situação de elevada poluição, e o mundo será um lugar mais saudável para se viver”.

Exemplo 10 (**Jogo da Rivalidade**). Considere duas empresas, a *Amazing* e a *Novolivro*, tendo cada duas estratégias, preço elevado e preço normal, e com a seguinte matriz de lucros:

Novolivro

.

		Preço Elevado	Preço Normal
Amazing	Preço Elevado	A(100; 200)	B(-20; 150)
	Preço Normal	C(150; -30)	**D^*(10; 10)**

Neste caso o ponto de equilíbrio (não-cooperativo) é o ponto ***D^*(10; 10).*** Perante esta estrutura, a Autoridade da Concorrência deve assegurar que as empresas não cooperam, isto é, não se conluiem. Tem-se uma estratégia dominante para a *Amazing*, mas não para *a Novolivro.*

Exemplo 11. O Chefe de um departamento de uma empresa suspeita que um seu empregado utiliza o tempo de serviço para participar em actividades lúdicas na internet, e encara instituir um sistema de fiscalização para o efeito. As opções (estratégias) do empregado são ir para internet ***D****ivertir-se* (não trabalhar) **(*D*)** ou ***T****rabalhar* **(*T*).** Por sua vez, as opções do chefe são ***F****iscalizar* ***(F)*** o empregado ou ***C****onfiar* **(*C*)** nele. A matriz de ganhos é a seguinte:

Empregado

		D	***T***
Chefe	***F***	**(-2; 0)**	**(-1; 1)**
	C	**(-4; 4)**	**(1; 1)**

Verifica-se que este jogo não tem ponto de equilíbrio de Nash em estratégias puras. Tal como os jogos de soma nula ou constante, também este jogo tem sempre ponto de equilíbrio em estratégias mistas. Este resultado é devido a Nash, que apresentou a respectiva demonstração geral para um jogo de $\boldsymbol{n}$-*Pessoas*.

.

A solução, deduzida à frente, é: Chefe : (3/4; 1/4); Ganho Esperado = – 3/2**;** Empregado: (1/2; 1/2); Ganho Esperado = +1.

Exemplo 12. (Corrida aos armamentos-equilíbrio de terror). Este exemplo formaliza, de forma qualitativa, os resultados durante a chamada guerra fria, período no pós-guerra (2ª guerra mundial) até fins dos anos oitenta, entre os Estados Unidos da América (USA) e a antiga União Soviética (URRS), as duas principais potencias de então e que polarizavam o grande “conflito” ideológico da altura, e que se traduzia por um reforço dos equipamentos militares por parte destes dois países. Considera-se que no caso de ambos os países continuarem a reforçar o seu já poderoso aparelho militar (incluído nuclear) existe risco para ambos os países (esteve eminente na crise dos mísseis de Cuba, por exemplo), devido a eventuais tentações dominadores decorrentes dos arsenais disponíveis. Se apenas um deles optar pelo reforço militar, esse fica mais forte e mais seguro, enquanto o opositor fica em risco e mais fraco. Se ambos não se reforçarem, ou até reduzirem, eles, e o mundo, ficam obviamente mais seguros. A matriz de resultados é a seguinte:

URSS

		Armam. (AR)	Desarmam (DA)
USA	**AR**	**A^*(Risco; Risco)**	B(Seguro e Forte; Risco e Fraco)
	DA	C(Risco e Fraco; Seguro e Forte)	D(Seguro; Seguro)

Verifica-se que o Ponto de Equilíbrio (Não-Cooperativo) é o ponto A^****(Risco; Risco).*** É um equilíbrio em estratégias dominantes. Qualquer que seja a estratégia do adversário, qualquer um deles prefere a estratégia de corrida aos armamentos, pois a alternativa é sempre pior. Por exemplo, se URRS escolher ***AR*** (correr aos armamentos), os USA ao escolherem ***AR****,* ficam melhores pois Risco é preferível a Risco e Fraco; Se a URSS escolher ***DA*** **(**não correr aos armamentos – desarmamento), os USA ao escolherem ***AR*** voltam a ficar melhor, pois Seguro e Forte é preferível a Seguro (forte faz a diferença). O mesmo raciocínio pode ser feito em relação às decisões da URSS face às duas possíveis escolhas dos USA.

Este exemplo ilustra a “racionalidade” da corrida aos armamentos por parte dos USA e da URSS durante a guerra fria, por muitas objecções morais e filosóficas que a decisão nos possa merecer, e merece seguramente. Foi o chamado ***Equilíbrio de Terror.***

Exemplo 13 (**Modelo de Duopólio de Cournot**). Considere o mercado de um produto em que existem apenas duas Empresas, Emp.1 e Emp.2, que produzem, respectivamente, as quantidades $\boldsymbol{q_1}$ e $\boldsymbol{q_2}$. O preço, ***p***, em função da procura total, ***Q***, é dado por ***p(Q) = 1000-0,8Q***, sendo $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{q_1} + \boldsymbol{q_2}$. O custo unitário de produção é igual para as duas empresas e é ***c = 100***.

Trata-se de um jogo infinito de *2-Pessoas* de soma não constante. Existem infinitas estratégias para cada jogador. Este jogo tem ponto equilíbrio, que corresponde ao lucro máximo para cada empresa, dado que a outra utiliza a sua melhor estratégia. A sua solução será apresentada mais à frente.

10. Solução (não-cooperativa) de um jogo de *2-Pessoas* de soma não constante

Quando o jogo é finito e tem um ou mais pontos de equilíbrio em estratégias puras, a sua determinação é em geral simples, aplicando a definição de equilíbrio de Nash inspeccionando os respectivos elementos da matriz de ganhos para cada par de estratégias dos jogadores. Foi assim que determinamos os pontos de equilíbrio, quando existiam, dos jogos exemplificados atrás.

Quando o jogo tem mais do que um ponto de equilíbrio (multiplicidade de equilíbrios), como acontece no exemplo da batalha dos sexos, em geral não existe equivalência entre eles, em termos dos ganhos obtidos por cada um dos jogadores, situação qua nunca acontecia nos jogos de soma nula. Não havendo superioridade de nenhum dos equilíbrios, não é possível prever, sem mais, qual irá prevalecer (poderá depender da ordem de jogada).

Tal como nos jogos de soma nula, também nestes jogos pode não haver ponto de equilíbrio em estratégias puras. É o que acontece no exemplo 11 (jogo Chefe versus Empregado). No entanto, tal como nos jogos de soma nula existe sempre ponto de equilíbrio em estratégias mistas, isto é, uma estratégia que associa uma probabilidade a cada estratégia pura. Este resultado é devido a Nash, que provou a sua existência no caso geral de $\boldsymbol{n}$ jogadores. Nos casos mais simples, em que ambos os jogadores não disponham de mais de duas estratégias (depois de eliminadas as estratégias dominadas), a sua solução pode ser encontrada graficamente. Vamos determiná-la graficamente utilizando o exemplo referido (exemplo11).

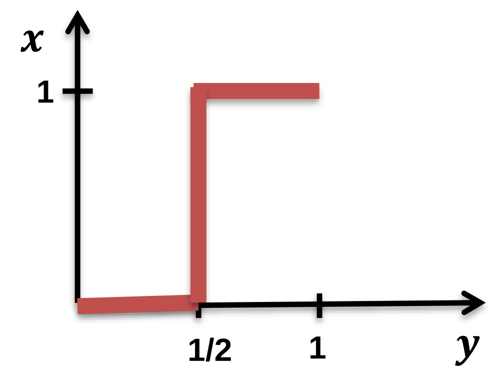
Considere-se novamente o exemplo 11, que, como se viu, não tem solução em estratégias puras, e associe-se as probabilidades $(x_1, x_2) = (x, 1-x)$ às estratégias **F e C,** respectivamente, do Chefe (Jogador 1) e as probabilidades $(y_1, y_2) = (y, 1-y)$ às estratégias **D** e **T** do Empregado (Jogador 2):

Empregado

Chefe		D	T	
	F	(-2; 0)	(-1; 1)	x
	C	(-4; 4)	(1; 1)	$1-x$
		y	$1-y$	

Ganho Esperado da Empresa (Chefe):

- Se Chefe Fiscalizar, **F**: $-2y - 1(1-y) = -y - 1$
- Se Chefe Confiar, **C**: $-4y + 1(1-y) = -5y + 1$



Melhor resposta do Chefe em função de y

- Para $y < 1/2$, Chefe deve Confiar, **C**, isto é, $x = 0$
- Para $y > 1/2$, Chefe deve Fiscalizar, **F**, isto é, $x = 1$
- Para $y = 1/2$, é indiferente, isto é, $0 \leq x \leq 1$

Estratégia do Empregado: $(y_1, y_2) = (y, 1-y) = (1/2; 1/2)$

Melhor resposta do Empregado em função de x

- Para $x < 3/4$, Divertir, **D**, isto é, $y = 1$
- Para $x > 3/4$, Trabalhar, **T**, isto é, $y = 0$
- Para, $x = 3/4$, é indiferente, isto é, $0 \leq y \leq 1$

Ganho Esperado do Empregado:

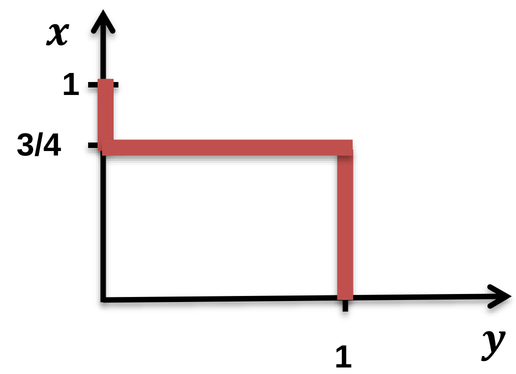
- Se se Divertir, **D:** $4(1-x) = -4x + 4$
- Se Trabalhar, **T**: $x + (1-x) = +1$

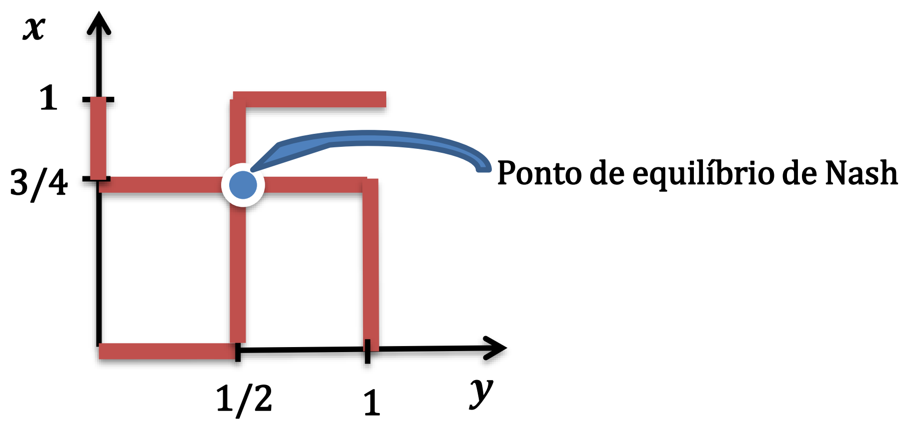
Estratégia do Chefe: $(x_1, x_2) = (x, 1-x) = (3/4; 1/4)$

Graficamente e em síntese:

Empregado

Chefe		D	T	
	F	(-2; 0)	(-1; 1)	x
	C	(-4; 4)	(1; 1)	1-x
		y	1-y	





Estratégia do Chefe: $(x_1, x_2) = (x, 1 - x) = (3/4; 1/4)$

Ganho Esperado da Empresa (Chefe): -2 * 3/4 * 1/2 – 4 * 1/4 *1/2 – 1 * 3/4 *1/2 + 1 * 1/4 * 1/2 = - 3/2

Estratégia do Empregado: $(y_1, y_2) = (y, 1 - y) = (1/2; 1/2)$

Ganho esperado do empregado: 0 * 3/4 * 1/2 + 4 * 1/4 *1/2 + 1 * 3/4 *1/2 + 1 * 1/4 * 1/2 = 1

De um modo geral, Tal como para os jogos de soma nula, para um jogo geral de *2-Pessoas*, com $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$ estratégias, respectivamente, para os jogadores I e II, podemos então estabelecer a seguinte definição:

Definição. Um par de estratégias mistas $(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{Y}^*)$, com $\boldsymbol{X}^* = (\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*, \dots \boldsymbol{x}_m^*)$ e $\boldsymbol{Y}^* = (\boldsymbol{y}_1^*, \boldsymbol{y}_2^*, \dots \boldsymbol{y}_n^*)$, para a bimatriz do jogo $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ é um ponto de equilíbrio se para qualquer par de estratégias mistas, $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$

$$\boldsymbol{X}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{Y}^{*^T} \le \boldsymbol{X}^*\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{Y}^{*^T} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{X}^*\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}} \le \boldsymbol{X}^*\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{Y}^{*^T}$$

O teorema seguinte garante a existência de pelo menos um ponto de equilíbrio.

Teorema. Todo o jogo com a bimatriz $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ tem pelo menos um ponto de equilíbrio (a demonstração pode ser vista em Owen, Game Theory).

Deste modo, qualquer jogo, não cooperativo, de *2-Pessoas* tem ponto de equilíbrio, em estratégias puras ou em estratégias mistas, ou até em ambas. É o que acontece com o exemplo 9, batalha dos sexos, que para além dos equilíbrios em estratégias puras (F; F)=(10; 5) e (C; C)= (5; 10), tem também ponto de equilíbrio em estratégias mistas dado por $(\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*)$ =(2/3, 1/3), futebol com probabilidade 2/3 e cinema com probabilidade 1/3para o jogador I (João), e $(\boldsymbol{y}_1^*, \boldsymbol{y}_2^*)$ = (1/3, 2/3), cinema com probabilidade 2/3 e futebol com probabilidade 1/3, para o jogador II (Maria). A utilidade esperada é, neste caso, 10/3 para cada um deles.

Quando o jogo é infinito, isto é, o conjunto das possibilidades no qual cada jogador faz a sua escolha é infinito, em determinadas condições muito gerais é possível encontrar facilmente a solução através do processo clássico de optimização. Com efeito, através do teorema de Nikaido e Isoda, sabe-se que dado um jogo na forma normal, se o conjunto de estratégias dos jogadores é constituído por subconjuntos convexos e compactos de espaços Euclideanos, $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{i}} \subset \mathcal{R}^{m_i}$, e as suas funções de ganhos, $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{i}}$, forem contínuas e concavas em $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{i}}$, existirá sempre um ponto de equilíbrio na forma em que foi definido por Nash, que poderá não ser único.

Encontremos então a solução do exemplo 13 (**Duopólio de Cournot**). Representação do Jogo:

Jogadores: **Empresa 1 e Empresa 2**

Estratégias das Empresas, 1 e 2, respectivamente: $\boldsymbol{S_1 = q_1 = [0, +\infty)}$; $\boldsymbol{S_2 = q_2 = [0, +\infty)}$

Função de Ganhos das empresas, 1 e 2, respectivamente :

$$L_1(q_1, q_2) = q_1[\,p(Q) - 100] = q_1[\,1000 - 0,8(q_1 + q_2) - 100] = (1000 - 100 - 0,8\,q_2)q_1 \;- 0,8q_1^2$$

$$L_2(q_1, q_2) = q_2[\,p(Q) - 100] = q_2[\,1000 - 0,8(q_1 + q_2) - 100] = (1000 - 100 - 0,8\,q_1)q_2 \;- 0,8q_2^2$$

Solução:

$Max\ L_1(q_1, q_2^*) = (1000 - 100 - 0,8q_2^*)q_1 \;- 0,8q_1^2$ e $Max\ L_2(q_1^*, q_2) = (1000 - 100 - 0,8q_1^*)q_2 \;- 0,8\,q_2^2$

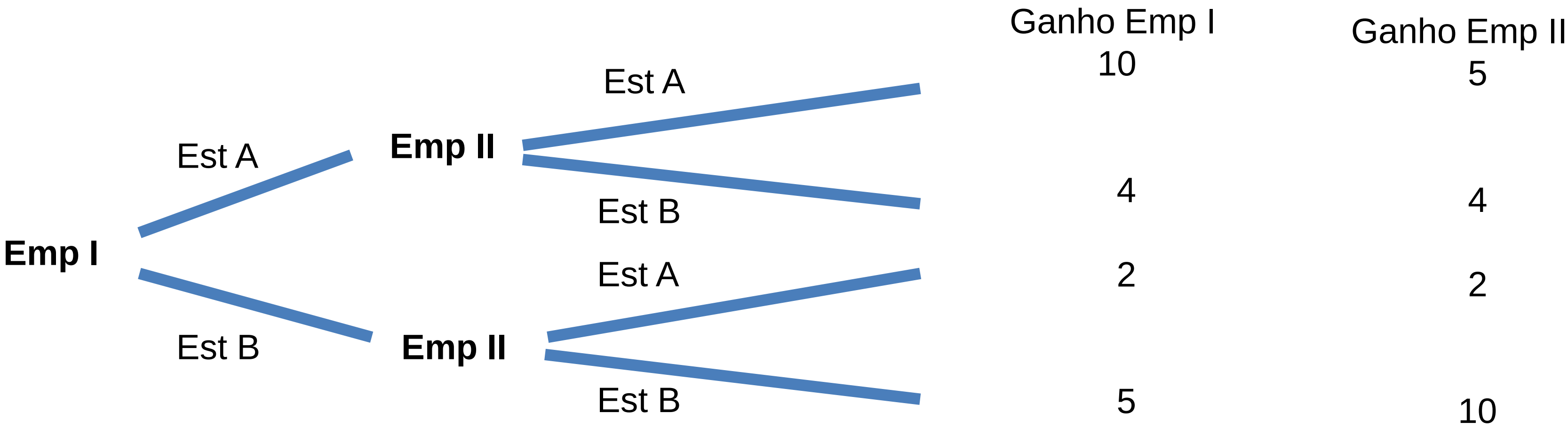
$$\frac{\partial\, L_1(q_1, q_2^*)}{\partial q_1} = 1000 - 100 - 8q_2^* - 2 * 0,8q_1 = 0 \qquad \frac{\partial\, L_2(q_1^*, q_2)}{\partial q_2} = 1000 - 100 - 8q_1^* - 2 * 0,8q_2 = 0$$

$$q_1^* = \frac{1000 - 100 - 0,8q_2^*}{2 * 0,8} = \frac{900 - 0,8q_2^*}{1,6} \qquad q_2^* = \frac{1000 - 100 - 0,8q_1^*}{2 * 0,8} = \frac{900 - 0,8q_1^*}{1,6}$$

Resolvendo por substituição, vem

$q_1^* = \frac{1000 - 100}{3 * 0,8} = 375$; $q_2^* = \frac{1000 - 100}{3 * 0,8} = 375$; p = 400; Lucro da Empresa 1, L_1= 112 500; Lucro Empresa 2, L_2= 112 500

Exemplo.14 (Jogo, finito, sequencial de *2-Pessoas*). Considerem-se duas empresas, I e II, com dois *standards* (estratégias), A e B. A empresa I prefere A e a empresa II prefere B, mas qualquer uma delas pode utilizar qualquer *standard*. Supondo que I é a primeira a escolher, tem-se a árvore das diversas estratégias:



		Emp II	
		Est A	**Est B**
Emp I	**Est A**	**(10; 5)**	**(4; 4)**
	Est B	**(2; 2)**	**(5; 10)**

Neste caso, existem dois Pontos de equilíbrio:

(A; A) **= (10; 5)** e *(B; B)* **= (5; 10)**

11. Jogos Não Cooperativos de n −*Pessoas*

Quando o jogo é de $\boldsymbol{n}$ −*Pessoas*, com $\boldsymbol{n}$ >2, independentemente de ser de soma nula (ou constante), põe-se a questão da solução ser cooperativa ou não-cooperativa. Neste ponto serão apenas discutidas soluções não-cooperativas. Aliás, quando se fala de ponto de equilíbrio de Nash estamos a falar de solução não-cooperativa, embora Nash também tenha estudado os jogos cooperativos.

Como se sabe, neste caso temos um conjunto $\boldsymbol{n}$ de jogadores, $\boldsymbol{P_1, P_2, \dots, P_n}$, que dispõem cada um, respectivamente, de um conjunto de estratégias/acções $\boldsymbol{S_1, S_2, \dots, S_n}$ e cada jogador $\boldsymbol{i}$, com $\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, n}$, tem uma função de ganhos $\boldsymbol{L_i(s_1, , s_2, \dots, s_n)}$, para todo o $\boldsymbol{s_1} \in \boldsymbol{S_1}$, $\boldsymbol{s_2} \in \boldsymbol{S_2}, \dots, \boldsymbol{s_n} \in \boldsymbol{S_n}$, isto é, para toda a combinação de estratégias dos jogadores envolvidos.

Na situação descrita, havendo ponto de equilíbrio em estratégias puras, cada jogador deve escolher a sua estratégia, $\boldsymbol{s_i}$, supondo um comportamento racional dos restantes participantes na escolha das respectivas estratégias, de forma a maximizar o seu ganho. Matematicamente, uma combinação de estratégias $\boldsymbol{(s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)}$ é um ***ponto de equilíbrio de Nash***, ou ***solução não-cooperativa***, se, para todo o $\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, m}$,

$$\boldsymbol{L_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) \geq L_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)} \qquad (2.10)$$

Para todo o $\boldsymbol{s_i} \in \boldsymbol{S_i}$. Isto é, $\boldsymbol{s_i^*}$ resulta da solução de

$$\boldsymbol{Max\ L_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)} \qquad (2.10a)$$

s. a: $\boldsymbol{s_i} \in \boldsymbol{S_i}$

Isto implica que nenhum jogador beneficia se mudar de estratégia quando todos os demais se mantêm. Ninguém é incentivado a mudar unilateralmente de estratégia. É esta a essência do equilíbrio (não-cooperativo) de Nash, como já tínhamos referido nos jogos de duas pessoas, pois o princípio é o mesmo.

Quando o jogo é infinito, isto é, o conjunto das possibilidades no qual cada jogador faz a sua escolha é infinito, em determinadas condições muito gerais é possível encontrar facilmente a solução através do processo clássico de optimização. Como dissemos atrás, através do teorema de Nikaido e Isoda sabe-se que dado um jogo na forma normal, se o conjunto de estratégias dos jogadores é constituído por subconjuntos convexos e compactos de espaços Euclideanos, $\boldsymbol{S_i} \subset \mathcal{R}^{\boldsymbol{m_i}}$, e as suas funções de ganhos, $\boldsymbol{L_i}$, forem contínuas e concavas em $\boldsymbol{S_i}$, existirá sempre um ponto de equilíbrio na forma em que foi definido por Nash, que poderá não ser único.

Teorema (Nikaido-Isoda). Seja um jogo não cooperativo de $\boldsymbol{n}$ *–**Pessoas,*** $\boldsymbol{S_k}$ o conjunto das estratégias do jogador k, $\boldsymbol{L_k}$ a sua função de ganhos. Supondo que $\boldsymbol{S_k}$ é não vazio, convexo, limitado e fechado num espaço vectorial de dimensão finita, é uma função contínua em todas as variáveis, concava em $\boldsymbol{s_k}$, com $\boldsymbol{s_1, \dots, s_{k-1}, s_{k+1}, \dots, s_n}$, então o jogo tem pelo menos um ponto de equilíbrio

Quando o jogo é finito, e tal como já referimos atrás, o jogo pode não ter ponto de equilíbrio em estratégias puras. Todavia, o teorema principal de Nash (1951) mostra que sob o domínio de estratégias mistas todo o jogo finito tem no mínimo um ponto de equilíbrio. Convém, no entanto, salientar que, como no caso do teorema aplicado aos jogos infinitos, o teorema que garante a existência de solução nos jogos finitos, além de não garantir a unicidade, também não garante a equivalência e intermutabilidade das soluções no caso de existir mais do que uma.

Teorema (do equilíbrio de Nash). Qualquer jogo finito não cooperativo de $\boldsymbol{n}$ –***Pessoas*** tem pelo menos um ponto de equilíbrio em estratégias mistas. Se o jogador $\boldsymbol{i}$ dispuser de $\boldsymbol{m}$ estratégias puras, a sua estratégia mista é dada pelo vector de probabilidades $\left(\boldsymbol{x_{i_1}},\ \boldsymbol{x_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{x_{i_m}}\right)$.

Este teorema generaliza para $\boldsymbol{n}$ jogadores o equivalente referido para dois jogadores. No entanto, a obtenção das estratégias mistas reveste-se de grande dificuldade quando estamos perante $\boldsymbol{n > 2}$. O processo de obtenção das estratégias mistas resulta da demonstração do teorema através da optimização de um problema não linear. Note-se, no entanto, que não existem grandes diferenças conceptuais entre a teoria dos jogos não-cooperativos de n –*Pessoas* e os jogos não-cooperativos de *2-Pessoas*.

Podemos então sintetizar que o teorema do *minimax* de von Neumann demonstra a existência de equilíbrio para uma classe muita restrita de jogos, a classe dos jogos de 2-Pessoas de soma nula. Porém, de facto o resultado é geral, para $\boldsymbol{n}$ −*Pessoas*, pois todo o jogo possui equilíbrio em estratégias mistas, como foi demonstrado (recorrendo ao teorema do ponto fixo de Brouwer) por Nash.

Exemplo15. (O Problema dos Comuns - Baldios). Considere-se uma comunidade, onde cada criador de ovelhas tem a opção de manter, ou não, as suas ovelhas no pasto comum (baldio). Seja g_i o número de ovelhas detidas pelo criador $\boldsymbol{F_i}$, $\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, n}$. O custo associado à compra e cuidados com cada ovelha é igual a $\boldsymbol{c}$, independentemente do número de ovelhas. O valor de cada ovelha é dado pela função $\boldsymbol{v(G)}$, em que $\boldsymbol{G = g_1 + g_2 + \cdots + g_n}$. O número máximo de ovelhas que podem ser postas a pastar no baldio é dado por $\boldsymbol{\overline{G}}$. Portanto, $\boldsymbol{v(G) > 0}$ se $\boldsymbol{G < \overline{G}}$ e $\boldsymbol{v(G) = 0}$ se $\boldsymbol{G > \overline{G}}$. Supondo que existem primeira e segunda derivadas negativas para $\boldsymbol{v(G)}$, isto é, $\boldsymbol{v'(G) < 0}$ $\boldsymbol{v''(G) < 0}$, o problema consiste em saber quantas ovelhas cada criador deve ter para pastar no baldio.

Representação na forma normal:

Conjunto dos Jogadores: $\boldsymbol{\{F_1, \dots, F_n\}}$;

Conjunto das Estratégias**:** $\boldsymbol{S_i = [0, \overline{G}]}$, para $\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, n}$

Funções de ganhos: $\boldsymbol{L_i(g_1, \ g_2, \dots, g_n) = g_i v(g_1 + g_2 + \cdots + g_n) - c g_i}$, para $\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, n}$

Solução:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{Max\ L_1(g_1, g_2^*, \dots, g_n^*) = g_1 v(g_1 + g_2^* + \cdots + g_n^*) - c g_1} \\
&\textbf{s. a:}\quad \boldsymbol{0 \le g_1 \le \overline{G}} \\
&\qquad\qquad\qquad \boldsymbol{\dots} \\
&\boldsymbol{Max\ L_n(g_1^*, g_2^*, \dots, g_n) = g_n v(g_1^* + g_2^* + \cdots + g_n) - c g_n} \\
&\textbf{s. a:}\quad \boldsymbol{0 \le g_n \le \overline{G}}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Condições de 1ª Ordem:

$$\begin{gathered} v(g_1 + g_2^* + \cdots + g_n^*) + g_1 v'(g_1 + g_2^* + \cdots + g_n^*) - c = 0 \\ \ldots \\ v(g_1^* + g_2^* + \cdots + g_n) + g_n v'(g_1^* + g_2^* + \cdots + g_n) - c = 0 \end{gathered} \tag{2.12}$$

Então, $(g_1^*,\ g_2^*, \ldots, g_n^*)$ é ponto de equilíbrio de Nash se for solução do sistema anterior, isto é, se

$$\begin{gathered} v(g_1^* + g_2^* + \cdots + g_n^*) + g_1^* v'(g_1^* + g_2^* + \cdots + g_n^*) - c = 0 \\ \ldots \\ v(g_1^* + g_2^* + \cdots + g_n^*) + g_n^* v'(g_1^* + g_2^* + \cdots + g_n^*) - c = 0 \end{gathered} \tag{2.13}$$

Somando as equações de (2.13) e dividindo por n, vem

$$v(G^*) + \frac{1}{n} G^* v'(G^*) - c = 0, \text{ com } \quad G^* = g_1^* + g_2^* + \cdots + g_n^* \tag{2.14}$$

O Problema Social

$$Max\ \ Gv(G) - Gc$$

s. a: $0 \le G \le \overline{G}$

Resolvendo $v(G) + Gv'(G) - c = 0$ (condições de 1ª ordem), G^{**} é solução óptima se

$$v(G^{**}) + G^{**} v'(G^{**}) - c = 0 \tag{2.15}$$

Em síntese:

$\boldsymbol{v(G^*) + \frac{1}{n} G^* v'(G^*) - c = 0}$ $\qquad\qquad\qquad$ $\boldsymbol{v(G^{**}) + G^{**} v'(G^{**}) - c = 0}$

Se $\boldsymbol{G^*} > \boldsymbol{G^{**}}$, o número total de ovelhas no pasto comum desejado pelos criadores (solução óptima empresarial) é superior ao que a optimização social recomendaria (desejável sob o ponto de vista da sociedade). Restrições impostas pelo Estado?

Exemplo 16. Considere-se o exemplo dos comuns simplificado, onde cada criador tem apenas uma ovelha e tem a opção de a manter, ou não, a pastar no baldio. O ganho obtido com a ovelha, em leite e lã, é de 1 u.m.. Por outro lado, se a ovelha estiver no pasto comum contribui para um dano ambiental, compartilhado por todos os criadores, cujo valor é 5 u.m.. Pretende encontrar-se o(s) ponto(s) de equilíbrio, isto é, se cada criador deve pôr, ou não, a sua ovelha no pasto comum.

Cada criador dispõe de 2 estratégias: pôr ou não pôr a sua ovelha no pasto, isto é,

$$\boldsymbol{g_i} = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se o } i - \acute{e}simo \text{ criador põe a sua ovelha no pasto} \\ \mathbf{0} & \text{se o } i - \acute{e}simo \text{ criador não põe a sua ovelha no pasto} \end{cases}$$

O ganho do $i - \acute{e}simo$ criador é dado pela expressão

$$\boldsymbol{L_i(g_1, g_2 \ldots, g_n) = g_i - 5\,\frac{g_1 + g_2 + \cdots + g_n}{n}}$$

Se $\boldsymbol{n > 5}$, pôr todas as ovelhas no pasto, isto é, $\boldsymbol{g_1^*} = \boldsymbol{g_2^*} = \cdots = \boldsymbol{g_n^*} = 1$, é o único ponto de equilíbrio de Nash. Com efeito, se todas as ovelhas estão no pasto e um criador decide retirar a sua ovelha, deixa de ganhar **1** u.m. e deixa de gastar **5/$\boldsymbol{n}$<1,** ou seja, este criador acaba por ganhar menos do que se mantivesse lá a sua ovelha**.** Deste modo, todos manterão a sua ovelha no pasto e cada um ganhará – **4,** havendo um dano ambiental máximo.

Suponhamos que existia um imposto $\boldsymbol{t}$ por unidade por manter a sua ovelha no pasto. Neste caso o ganho seria dado por

$$\boldsymbol{L_i(g_1, g_2 \ldots, g_n) = g_i - tg_i - 5\frac{g_1 + g_2 + \cdots + g_n}{n}}$$

Se $\boldsymbol{t = 5,}$ então $\boldsymbol{g_1^*} = \boldsymbol{g_2^*} = \cdots = \boldsymbol{g_n^*} = 0$ é o único equilíbrio de Nash, o que significa que todos os criadores preferem retirar as ovelhas do pasto. Um caso curioso acontece quando $\boldsymbol{n = 6}$ e $\boldsymbol{t = 1/6}$. Neste caso todas as soluções são pontos de equilíbrio de Nash.

Exemplo 17 (**A tragédia dos comuns**). O exemplo anterior enquadra-se num problema típico da teoria dos jogos conhecido como a tragédia dos comuns e caracteriza uma situação em que o ponto de equilíbrio de Nash corresponde a uma solução em que o conjunto acaba por ficar pior, pois todos tomam a mesma decisão, embora cada decisão individual pouco afecte o conjunto e seja tomada em benefício próprio. No fim cada jogador não obtém o melhor que lhe é possível individualmente, daí a designação. Ilustremos com um exemplo talvez mais sugestivo, começando apenas com dois jogadores, para generalizar a seguir. Dois amigos resolvem ir almoçar juntos ao restaurante e combinam pagar a conta "a meias". Para simplificar, só existem dois pratos, o prato Caro ***(C)*** e o prato Barato ***(B)***. Do prato caro cada um dos amigos retira uma utilidade de 20€, mas o prato custa 15€. O prato barato tem uma utilidade de 15€ e custa 10€. Portanto, o prazer, medido pela diferença entre a utilidade e o custo, é igual em ambos os pratos. Aparentemente a escolha deveria recair na escolha do prato barato pelos dois amigos, já que retiram o mesmo prazer e pagam menos. Vejamos o que acontece:

Jog.2

Jog.1		C	B
	C	**(5; 5)**	**(7,5; 2,5)**
	B	**(2,5; 7,5)**	**(5; 5)**

Verifica-se facilmente que o ponto de equilíbrio consiste em cada amigo escolher o prato mais caro, estratégias ***(C; C)*** – equilíbrio dominante. Este exemplo é semelhante a outros já vistos, dispensando comentários adicionais .

Se tivermos um grupo de 20 amigos, jogo com 20 jogadores, conclui-se imediatamente que a escolha do prato mais caro por todos eles é ponto de equilíbrio de Nash, pois quem pedir um prato mais barato baixa a sua utilidade em 5€ (15€-20€) e poupa apenas 0,25€ - 25 cêntimos! – que corresponde aos 5€ a dividir por 20 comensais. Portanto ninguém está incentivado a escolher um prato mais barato face à redução da respectiva utilidade. As únicas alternativas seriam combinarem pedir todos o prato mais barato, mas nesse caso seria uma solução cooperativa, ou equilíbrio cooperativo, ou então cada um estar por sua conta, isto é, comer o que paga, mas nesse caso deixaria de ser um jogo estratégico, pois tínhamos para cada situação apenas um elemento e a sua decisão não interagia com a de nenhum outro elemento, nem o seu resultado dependia disso.

Mais geralmente, se tivermos $\boldsymbol{n}$ amigos na refeição conjunta, nas condições indicadas, com $\boldsymbol{m}$ pratos à disposição, a solução seria a mesma, desde que a diferença de utilidade entre pratos fosse maior do que a respectiva diferença de custos a dividir por $\boldsymbol{n}$. Se $\Delta \boldsymbol{u_k}$ for a diferença de utilidade entre o prato mais caro e outro prato $\boldsymbol{k}$, $\Delta \boldsymbol{c_k}$ a diferença de custo entre os pratos respectivos, para cada jogador, se $\Delta \boldsymbol{u_k} \geq \frac{\Delta \boldsymbol{c_k}}{\boldsymbol{n}}$, o que geralmente acontece, então não vale a pena escolher um prato mais barato, sendo o prato mais caro a solução escolhida por todos (equilíbrio de Nash).

Exemplo 18. (Oligopólio de Cournot). Considere o mercado de um produto em que existem $\boldsymbol{n}$ Empresas. A quantidade produzida pela Empresa $\boldsymbol{i}$, que desconhece as quantidades produzidas pelas restantes empresas do mercado, é designada $\boldsymbol{q_i}$. O preço, $\boldsymbol{p}$, em função da procura total, $\boldsymbol{Q}$, é dado por $\boldsymbol{p(Q) = a - bQ}$, sendo $\boldsymbol{Q = q_1 + q_2 + \cdots + q_n}$. O custo da Empresa $\boldsymbol{i}$ é dado por $\boldsymbol{C_i(q_i) = cq_i}$.

Representação na forma normal:

Conjunto dos Jogadores: $\{\boldsymbol{E_1, \dots, E_n}\}$;

Conjunto das Estratégias: $\boldsymbol{S_i = [0, +\infty]}$, para $\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, n}$

Funções de ganhos: $\boldsymbol{L_i(q_1,\ q_2, \dots, q_n) = q_i[a - b(q_1 + q_2 + \cdots + q_n) - c]}$, para $\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, n}$

Nesta caso estamos perante um jogo de $\boldsymbol{n}$-Pessoas, infinito, pois cada empresa dispõe, para escolher, e um número infinto de possibilidades de quantidades a produzir. Neste jogo, como se disse, se o conjunto de estratégias dos jogadores é constituído por subconjuntos convexos e compactos de espaços Euclideanos, $\boldsymbol{S_i} \subset \boldsymbol{\mathcal{R}^{m_i}}$, e as suas funções de ganhos, $\boldsymbol{L_i}$, forem contínuas e concavas em $\boldsymbol{S_i}$, existirá sempre um ponto de equilíbrio na forma em que foi definido por Nash, que poderá não ser único.

A sua solução obtém-se através dos processos clássicos de optimização, por recurso ao cálculo diferencial, através de optimização das $\boldsymbol{n}$ funções seguintes e resolução do sistema de equações daí decorrente:

$$\boldsymbol{Max\ L_1(q_1, q_2^*, \dots, q_n^*) = q_1[a - b(q_1 + q_2^* + \cdots + q_n^*) - c]}$$

s. a: $\boldsymbol{0 \le q_1 \le +\infty}$

$$\boldsymbol{Max\ L_2(q_1^*, q_2, \dots, q_n^*) = q_2[a - b(q_1^* + q_2 + \cdots + q_n^*) - c]}$$

s. a: $\boldsymbol{0 \le q_2 \le +\infty}$

$$\boldsymbol{\dots} \qquad (2.16)$$

$$\boldsymbol{Max\ L_n(q_1^*, q_2^*, \dots, q_n) = q_n[a - b(q_1^* + q_2^* + \cdots + q_n) - c]}$$

s. a: $\boldsymbol{0 \le q_n \le +\infty}$

A optimização de cada uma das funções de lucros dá origem ao sistema com as incógnitas $\boldsymbol{q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*}$

$$\boldsymbol{q_1^* = \frac{a - b(q_2^* + \cdots + q_n^*) - c}{2b};\quad q_2^* = \frac{a - b(q_1^* + \cdots + q_n^*) - c}{2b};\quad \dots \quad q_n^* = \frac{a - b(q_1^* + \cdots + q_{n-1}^*) - c}{2b}} \qquad (2.16a)$$

cuja solução indica a estratégia óptima de produção para cada empresa.

12. Jogos Cooperativos de $\boldsymbol{n}$ –*Pessoas*

Os *jogos cooperativos*, ou *coalizionais*, ao contrário dos jogos não-cooperativos, possuem na sua estrutura interna condições que facultam aos agentes a possibilidade de formarem ***coalizões*** entre si, tendo em vista um certo resultado.

Obs. Como vimos atrás, nos jogos de ***2-Pessoas*** apenas no caso em que o jogo é de soma não constante existe a possibilidade de cooperação. Nos jogos de ***n-Pessoas*** $(n > 2)$ existem as duas possibilidades, dependendo do tipo de jogo. Uma vez que a metodologia de abordagem entre os jogos cooperativos de duas e os de mais pessoas não é substancialmente diferente, apenas na dificuldade de resolução decorrente do tamanho, faremos abordagem genérica dos jogos de ***n-Pessoas***, com enfase em ilustrações de jogos de ***3-Pessoas*** por facilidade pedagógica.

Formalmente, um jogo cooperativo consiste num conjunto finito, $\boldsymbol{N} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{n}\}$, de jogadores e de uma função de resultados $\boldsymbol{v} : \mathbf{2}^{\boldsymbol{n}} \to \boldsymbol{\mathcal{R}}$ que aplica os subconjunto de $\boldsymbol{N}$ no conjunto dos números reais $\boldsymbol{\mathcal{R}}$, incluindo, por convenção, $\boldsymbol{v}(\emptyset) = 0$. Habitualmente o jogo representa-se pelo par $(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{v})$.

Coalizão (ou coligação na linguagem das alianças políticas) é qualquer subconjunto do conjunto dos jogadores, constituído por jogadores que resolvem agir como uma equipa no processo de escolha de estratégias. Sendo $\boldsymbol{N} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{n}\}$ o conjunto dos jogadores, então qualquer conjunto $\boldsymbol{S}$, com $\mathbf{S} \subset \boldsymbol{N}$, é uma coalizão, sendo $|\boldsymbol{S}|$ o número de elementos da mesma. A qualquer coalizão $\mathbf{S}$, com $\boldsymbol{S} \neq \emptyset, \boldsymbol{N}$, chama-se *coalizão não trivial*. À coalizão $\boldsymbol{S} = \emptyset$ chama-se *coalizão nula* ou coalizão vazia, e à coalizão $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{N}$ chama-se *grande coalizão* ou *supercoalizão*.

Função característica de um jogo é uma função $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{S})$ que associa a cada coalizão $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{N}$ o conjunto de todos os resultados que a coalizão $\boldsymbol{S}$ pode garantir. No que se segue supomos que esta função de resultados é "transferível", o que significa que o resultado total alcançado pela coalizão pode ser livremente distribuído pelos seus elementos. A hipótese de transferência da função característica permite que se considere apenas o melhor resultado obtido pela coalizão, sendo então $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{S})$ representada apenas por um único valor para cada $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{N}$, o qual será distribuído pelos respectivos membros.

Quando tratamos os jogos de 2-pessoas, geralmente utilizamos a sua forma normal, isto porque esta forma permite-nos tratar de forma mais simples analisar e determinar as estratégias mistas, que são a essência destes jogos. No entanto, a essência dos jogos cooperativos de n –pessoas não é mais a *aleatorização* (combinação) de estratégias, mas sim a formação de coalizões, daí a importância do estudo da função característica. Com efeito, a função característica indica-nos a capacidade das diferentes coalizões para obter resultados (valor), assumindo a combinação óptima das estratégias. Por exemplo, se o valor de uma coalizão resulta da iteração das estratégias dos seus elementos com os dos elementos fora da coalizão, o processo de optimização é feito de forma semelhante através do critério *maximin* para sua determinação (ver exemplo 19, mais à frente).

Considerando o conjunto vazio, ∅, a coalizão sem elementos, do exposto resulta que:

$$\boldsymbol{v}(\emptyset) = \boldsymbol{v}(\{\ \}) = \mathbf{0} \tag{2.17}$$

No caso do jogo cooperativo, apenas se necessita dos resultados que os jogadores ou as coalizões podem garantir para si. Esta informação consta da *função característica* do jogo.

Quando a função característica representa ganhos (ou lucros, ou receitas, etc., por exemplo) ou genericamente é uma função de utilidade, o jogo é um *jogo de ganhos* ou um *jogo de valor (profit game ou value game em inglês).* Quando a *função característica* representa custos, o jogo designa-se por *jogo de custos (cost game).* Embora neste caso seja frequente o jogo representar-se pelo par $(\boldsymbol{N},\ \boldsymbol{c})$, e a função característica por $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{S})$, vamos manter as designações anteriores, indicando, no entanto, de que tipo de jogo se trata. É fácil de passar de um ao outro e aplicar e interpretar os conceitos em conformidade.

Associado a um jogo cooperativo, $(\boldsymbol{N},\ \boldsymbol{v})$, está associado o (seu) *Jogo Dual*, $(\boldsymbol{N},\ \boldsymbol{v}^*)$, com função característica definida por:

$$\boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{S}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{N}) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{N} \backslash \boldsymbol{S}), \forall\ \boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{N} \qquad (\boldsymbol{N} \backslash \boldsymbol{S} \text{ é o complementar de } \boldsymbol{S} \text{ relativamente a } \boldsymbol{N}) \tag{2.18}$$

Se o *jogo primal* (original) é um jogo de ganhos, o jogo dual é um jogo de custos e representa os custos de oportunidade associados á coalizão $\boldsymbol{S}$ por não pertencer á grande coalizão $\boldsymbol{N}.$ Se o jogo primal for um jogo de custos, o seu dual será um jogo de ganhos. Em certo sentido, um jogo e o seu dual são equivalentes e partilham muitas propriedades em comum. Por exemplo, o núcleo (conceito definido mais à frente) de um jogo e o do seu dual são iguais. Também é fácil de verificar que o dual de um jogo dual é o (seu) jogo primal.

Exemplo 19 (Game Theory, 2014, T. Ferguson**).** Considere um jogo de 3-Pessoas, com os jogadores I, II e III, em que cada jogador dispõe de duas estratégias puras, 1 e 2, cujos ganhos são os seguintes:

Se jogador **I** escolhe estratégia **1**:

		III	
		1	**2**
II:	**1**	(0, 3, 1)	(2, 1, 1)
	2	(4, 2, 3)	(1, 0, 0)

Se jogador **I** escolhe estratégia **2**:

		III	
		1	**2**
II:	1	(1, 0, 0)	(1, 1, 1)
	2	(0, 0, 1)	(0, 1, 1)

Pretende construir-se a função característica, $\boldsymbol{v}$, de ganhos, no correspondente jogo cooperativo, $(\boldsymbol{N},\boldsymbol{v})$. O valor de $\boldsymbol{v}(\emptyset)=\mathbf{0}$ é automático. Para encontrar o valor de $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{N})$ basta encontrar o terno com maior soma, isto é, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{N})=\mathbf{9}$. Para encontrar $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{1}\})$, temos de calcular o maior valor que o Jogador I, a actuar sozinho, pode garantir supondo que II e III procuram o melhor para eles. Construa-se a matriz dos ganhos de **I** contra **(II, III):**

		(II, III)			
		(1, 1)	**(1, 2)**	**(2, 1)**	**(2, 2)**
I:	**1**	0	2	4	1
	2	1	1	0	0.

Como as colunas dois e três são dominadas, restam as primeira e quarta coluna. Procedendo como nos jogos não cooperativos, determina-se o valor para o jogador I, vindo $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{1}\})=\mathbf{1}/\mathbf{2}.$

Para obter $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{2}\})$ e $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{3}\})$ procede-se de forma semelhante, obtendo-se, vindo $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{2}\}) = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{3}\}) = \mathbf{3/4}$. Para calcular $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{1,3}\})$ temos de construir a matriz da soma de ganhos de **I** e **III** contra **II**, que assume a seguinte forma:

		II	
		1	**2**
	(1, 1)	1	7
(I, III):	**(1, 2)**	3	1
	(2, 1)	1	1
	(2, 2)	2	1

Verifica-se que as estratégias (2,1) e (2, 2) são dominadas pela estratégia (1, 2) e, por isso nunca serão escolhidas pela coalizão {1, 3}, sendo eliminadas. Restam as estratégias (1, 1) e (1, 2). Procedendo como anteriormente, vem para a coalizão {1 3}, $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{1,3}\}) = \mathbf{5/2}$**.**

De forma similar, calculam-se os valores de **I** e **II** contra **III** e de **II** e **III** contra **I**, vindo então $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{1,2}\}) = \mathbf{3}$ e $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{2,3}\}) = \mathbf{2}$**.**

Nem todos os problemas e aplicações envolvem cálculos, e dificuldades, semelhantes aos do exemplo anterior, apresentando-se por vezes a construção da função característica bem mais fácil, até porque pode haver independência, e muitas vezes há, entre as decisões de uma coalizão e as decisões de elementos fora da coalizão. Os exemplos a seguir ilustram este aspecto.

Exemplo 20. O investigador João Guilherme inventou um novo medicamento. Como não o pode produzir, vai vender a fórmula às empresas farmacêuticas F2 ou F3. A empresa a quem ele vender partilhará um milhão de euros de lucro com João Guilherme. Pretende determinar-se a função característica do seu primal e do seu dual, considerando os valores em milhares.

Jogadores: J. Guilherme – **1;** Farmacêutica F2 **– 2;** Farmacêutica F3 – **3**

Função Característica do primal: $\boldsymbol{v}(\emptyset) = \boldsymbol{v}(\{\ \}) = \boldsymbol{v}(\{\mathbf{1}\}) = \boldsymbol{v}(\{\mathbf{2}\}) = \boldsymbol{v}(\{\mathbf{3}\}) = \boldsymbol{v}(\{\mathbf{2,3}\}) = \mathbf{0}$**;** $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{1,2}\}) = \boldsymbol{v}(\{\mathbf{1,3}\}) = \boldsymbol{v}(\{\mathbf{1,2,3}\}) = \mathbf{1\,000}$

Função característica do dual: $\boldsymbol{v}^*(\emptyset) = \boldsymbol{v}^*(\{\ \}) = \boldsymbol{v}^*(\{\mathbf{2}\}) = \boldsymbol{v}^*(\{\mathbf{3}\}) = \mathbf{0}$ **;** $\boldsymbol{v}^*(\{\mathbf{1}\}) = \boldsymbol{v}^*(\{\mathbf{1,2}\}) = \boldsymbol{v}^*(\{\mathbf{1,3}\}) = \boldsymbol{v}^*(\{\mathbf{2,3}\}) = \boldsymbol{v}^*(\{\mathbf{1,2,3}\}) = \mathbf{1\,000}$

Exemplo 21. João possui um terreno avaliado em 100 000 euros. António é um promotor imobiliário que não tem mas pode desenvolver o terreno e aumentar o seu valor para 200 000 euros. Manuel é outro promotor que também não tem mas também sabe desenvolver o terreno de modo a aumentar o seu valor para 300 000 euros.

Jogadores: João – **1;** António **– 2;** Manuel – **3**

Função Característica (valores em milhares de euros):

$\boldsymbol{v}(\emptyset) = \boldsymbol{v}(\{\ \}) = \boldsymbol{v}(\{\mathbf{2}\}) = \boldsymbol{v}(\{\mathbf{3}\}) = \boldsymbol{v}(\{\mathbf{2},\mathbf{3}\}) = \mathbf{0};\ \boldsymbol{v}(\{\mathbf{1}\}) = \mathbf{100};\ \boldsymbol{v}(\{\mathbf{1},\mathbf{2}\}) = \mathbf{200};\ \boldsymbol{v}(\{\mathbf{1},\mathbf{3}\}) = \boldsymbol{v}(\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3}\}) = \mathbf{300}$

Exemplo 22 (Jogo do lixo – Winston). Quatro proprietários de terrenos têm um saco de lixo cada, que procuram depositar numa propriedade que não seja a sua. Se $\boldsymbol{b}$ sacos de lixo forem depositados numa propriedade duma coalizão, esta recebe um ganho de $-\boldsymbol{b}$ (dano ambiental).

Função Característica. O melhor que os elementos de uma coalizão podem fazer é depositar o seu lixo nas propriedades dos elementos que não pertencem à coalizão ($|\boldsymbol{S}|$ é o número de jogadores em $\boldsymbol{S}$).

Jogadores: **1; 2; 3; 4**

$\boldsymbol{v}(\{\ \boldsymbol{S}\}) = -(4 - |S|)$ (se $|S| < 4$)

$\boldsymbol{v}(\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4}\}) = -4$ (se $|S| = 4$)

Em geral, assume-se frequentemente que a função característica goza de algumas propriedades:

Superaditivdade. Assim, sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, tal que $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \emptyset$, duas coalizões sem elementos comuns. De acordo com esta propriedade, uma coalizão mais alargada, formada pela união de coalizões disjuntas, deve possibilitar melhores (ou pelo menos iguais) resultados:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \geq \boldsymbol{v}(\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{B})$$

(2.19)

.

Os jogadores podem obter mais colectivamente do que em coalizões separadas. Neste caso o jogo diz-se um *jogo superaditivo.*

Monotonia. $A \subset B \Longrightarrow v(A) \leq v(B)$. Essencialmente esta propriedade indica que coalizões maiores possibilitam maiores resultados;

$\boldsymbol{v(N) > \sum_{i=1}^{n} v(\{i\})}$. Neste caso o jogo diz-se um ***jogo essencial*** ou *não trivial.* Quando $\boldsymbol{v(N) = \sum_{i=1}^{n} v(\{i\})}$ o jogo diz-se não essencial ou *inessencial* ou *trivial.*

Muitos jogos são superaditivos e essenciais. É razoável que assim aconteça, pois quando um jogo não é superaditivo e/ou essencial, a grande coalizão não será estável, dado haver a possibilidade de alguns jogadores abandonarem a grande coalizão por obterem melhores resultados fora dela, tornando-se irrelevante a procura de uma solução que distribua os ganhos da grande coalizão pelos jogadores, como mais à frente veremos.

Nota. Um jogo cooperativo é de *soma constante* se $\boldsymbol{v(S) + v(N \backslash S) = v(N)}$, $\forall \boldsymbol{S \subset N}$, e *de soma nula* se, adicionalmente, $\boldsymbol{v(N) = 0}$. Quando o jogo é de soma constante o jogo entre $\boldsymbol{S}$ e $\boldsymbol{N \backslash S}$ é então estritamente competitivo, e sendo finito, aplica-se o teorema do minimax.

Exemplo 23 (Retirado de Maschler e al.). Considere-se um jogo de 3 Jogadores com a seguinte função característica:

$\boldsymbol{v(\emptyset) = v(\{1\}) = (\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = 0; \; v(\{2,3\}) = 10; \; v(\{1,2,3\}) = 6}$

Neste caso a grande coalizão $\{\boldsymbol{1, 2, 3}\}$ não é estável, pois a cooperação dos jogadores 2 e 3 na coalizão $\{\boldsymbol{2, 3}\}$ permite obter melhores resultados, pois $\boldsymbol{v(\{2,3\}) = 10 > v(\{1,2,3\}) = 6}$. Não verifica nem a superaditividade nem a monotonia.

Exemplo 24. O jogo de 3 pessoas com função característica $\boldsymbol{v}(\emptyset) = \boldsymbol{v}(\{\mathbf{2}\}) = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{1}\}) = \mathbf{1/2}$, $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{3}\}) = \mathbf{3/4}$, $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{1,2}\}) = \mathbf{3}$, $\boldsymbol{v}(\mathbf{1,3}\}) = 5/2$, $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{2,3}\}) = \mathbf{2}$, $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{1,2,3}\}) = \mathbf{9}$ é um jogo superaditivo e essencial, isto é, não trivial: $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \geq \boldsymbol{v}(\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{B}), \forall\ \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \emptyset$ e $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{1,2,3}\}) = \mathbf{9} > \mathbf{1/2}+$ 0+ 3/4 $= \boldsymbol{v}(\{\mathbf{1}\}) + \boldsymbol{v}(\{\mathbf{2}\}) + \boldsymbol{v}(\{\mathbf{3}\})$.

Jogo simples é um jogo cooperativo, $(\boldsymbol{N},\ \boldsymbol{v})$, em que a sua função característica, $\boldsymbol{v}$, assume apenas os valores **1** (um) ou **0** (zero), ou seja as coalizões ou são *Ganhadoras* ou são *Perdedoras.* Deste modo, um *jogo simples* pode ser definido como uma classe $\boldsymbol{G}$ de coalizões, onde os respectivos elementos de $\boldsymbol{G}$ são chamadas *coalizões ganhadoras* e as restantes *coalizões perdedoras.* Assim, num jogo simples qualquer coalizão ou é ganhadoras ou é perdedora. Qualquer subconjunto de uma coalizão perdedora é também uma coalizão perdedora e qualquer superconjunto (conjunto que contém outro) de uma coalizão ganhadora é também uma coalizão ganhadora.

Exemplos típicos de jogos simples:

Jogo com decisão tomada por *maioria*, onde $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{S}) = 1$ se $|\boldsymbol{S}| > n/2$ e $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{S}) = 0$ no caso contrário;

Jogo com decisão tomada por *unanimidade*, onde $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{S}) = 1$ se $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{S}) = 0$ no caso contrário;

Jogo do Ditador $(\mathbf{1})$**,** onde $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{S}) = 1$ se $\mathbf{1} \in \boldsymbol{S}$ e $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{S}) = 0$ no caso contrário**.**

Definição. Seja $(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, \dots, \boldsymbol{p_n})$ um vector de elementos não negativos e $\boldsymbol{q}$ um valor tal que $\mathbf{0} < \boldsymbol{q} \leq \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{p_i}$. Um *jogo de maioria ponderada* $[\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, \dots, \boldsymbol{p_n}]$ é um jogo simples com a seguinte função característica:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{s}) = \begin{cases} \mathbf{0} & \boldsymbol{se} \quad \sum_{\boldsymbol{i}\in\boldsymbol{S}} \boldsymbol{p_i} < \boldsymbol{q} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{se} \quad \sum_{\boldsymbol{i}\in\boldsymbol{S}} \boldsymbol{p_i} \geq \boldsymbol{q} \end{cases}$$

Jogo normalizado ou 0-normalizado é um jogo em que $\boldsymbol{v(\{i\}) = 0, \forall\, i \in N}$.

Jogo normalizado (0; 1) é um jogo em que $\boldsymbol{v(\{i\}) = 0, \forall\, i \in N}$, e $\boldsymbol{v(N) = 1}$.

Definição. Dois jogos de n –*Pessoas*, $(\boldsymbol{N, w})$ e $(\boldsymbol{N, v})$, são *estrategicamente equivalentes*, ou $\boldsymbol{S}$ –*equivalentes*, se existe um número positivo $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{n}$ constantes reais $\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$, tais que $\forall\, \boldsymbol{S \subset N}$,

$$\boldsymbol{v(S) = rw(S) + \sum_{i \in S} \alpha_i}$$

Com esta transformação linear podemos transformar um jogo noutro estrategicamente equivalente, em particular num jogo *normalizado* ou *normalizado (0; 1)*, por vezes com algumas vantagens. Uma das vantagens da *normalização (0; 1)* é que em tal jogo, o valor $\boldsymbol{v(S)}$ de uma coalizão dá directamente a sua força, ou poder (i. e., montantes extra que os membros obtêm na sua formação), e todas as imputações são vectores de probabilidades (Owen, Game Theory).

Nota. Podem ser concebidos outros tipos de normalização. Uma comum é a *normalização (-1; 0)*, em que $\boldsymbol{v(\{i\}) = -1, \forall i \in N}$, e $\boldsymbol{v(N) = 0}$.

Exemplo 25. Transforme-se o jogo superaditivo e essencial de 3-pesssoas, $(\boldsymbol{N, w})$, com função característica $\boldsymbol{w(\emptyset) = 0}$, $\boldsymbol{w(\{1\}) = 1}$, $\boldsymbol{w(\{2\}) = 2}$, $\boldsymbol{w(\{3\}) = 3}$, $\boldsymbol{w(\{1,2\}) = 8}$, $\boldsymbol{w(\{1,3\}) = 10}$, $\boldsymbol{w(\{2,3\}) = 13}$, $\boldsymbol{w(\{1,2,3\}) = 15}$, num jogo *0-normalizado* e num jogo *normalizado (0; 1)*, $(\boldsymbol{N, v})$.

Fazendo $\boldsymbol{r = 1}$, $\boldsymbol{\alpha_1 = -1}$, $\boldsymbol{\alpha_2 = -2}$, $\boldsymbol{\alpha_3 = -3}$, vem para o jogo *0-normalizado*:

$\boldsymbol{v(\emptyset) = 0}$	$\boldsymbol{v(\{1,2\}) = w(\{1,2\}) - 1 - 2 = 5}$
$\boldsymbol{v(\{1\}) = w(\{1\}) - 1 = 0}$	$\boldsymbol{v(\{1,3\}) = w(\{1,3\}) - 1 - 3 = 6}$
$\boldsymbol{v(\{2\}) = w(\{2\}) - 2 = 0}$	$\boldsymbol{v(\{2,2\}) = w(\{2,3\}) - 2 - 3 = 8}$
$\boldsymbol{v(\{3\}) = w(\{3\}) - 3 = 0}$	$\boldsymbol{v(\{1,2,3\}) = w(\{1,2,3\}) - 1 - 2 - 3 = 9}$

Fazendo $\boldsymbol{r} = \mathbf{1/9}$, $\boldsymbol{\alpha_1} = \mathbf{-1/9}$, $\boldsymbol{\alpha_2} = \mathbf{-2/9}$, $\boldsymbol{\alpha_3} = \mathbf{-3/9}$, vem para o jogo *normalizado* (*0; 1):*

$$\boldsymbol{v}(\emptyset) = \mathbf{0}$$
$$\boldsymbol{v}(\{\mathbf{1}\}) = \mathbf{1/9}\boldsymbol{w}(\{\mathbf{1}\}) - \mathbf{1/9} = \mathbf{0}$$
$$\boldsymbol{v}(\{\mathbf{2}\}) = \mathbf{1/9}\boldsymbol{w}(\{\mathbf{2}\}) - \mathbf{2/9} = \mathbf{0}$$
$$\boldsymbol{v}(\{\mathbf{3}\}) = \mathbf{1/9}\boldsymbol{w}(\{\mathbf{3}\}) - \mathbf{3/9} = \mathbf{0}$$
$$\boldsymbol{v}(\{\mathbf{1,2}\}) = \mathbf{1/9}\boldsymbol{w}(\{\mathbf{1,2}\}) - \mathbf{1/9} - \mathbf{2/9} = \mathbf{5/9}$$
$$\boldsymbol{v}(\{\mathbf{1,3}\}) = \mathbf{1/9}\boldsymbol{w}(\{\mathbf{1,3}\}) - \mathbf{1/9} - \mathbf{3/9} = \mathbf{6/9}$$
$$\boldsymbol{v}(\{\mathbf{2,3}\}) = \mathbf{1/9}\boldsymbol{w}(\{\mathbf{2,3}\}) - \mathbf{2/9} - \mathbf{3/9} = \mathbf{8/9}$$
$$\boldsymbol{v}(\{\mathbf{1,2,3}\}) = \mathbf{1/9}\boldsymbol{w}(\{\mathbf{1,2,3}\}) - \mathbf{1/9} - \mathbf{2/9} - \mathbf{3/9} = \mathbf{1}$$

13. Solução de um Jogo Cooperativo

Ao contrário dos jogos não-cooperativos, nos jogos cooperativos existem muitos conceitos de solução, mas em todos eles a função característica é fundamental para a sua análise. O objectivo consiste em encontrar uma distribuição, entre os jogadores, dos resultados do jogo. Matematicamente uma solução é um vector $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{R}^n}$, em que cada componente representa o resultado atribuído a cada jogador, e que deverá verificar algumas condições, ou propriedades, para ser classificada como tal. São essas diferentes condições, baseadas em princípios lógicos de equidade e "justeza", que conduzem a diversos conceitos de solução.

Seja $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{N})$ o valor da ***grande coalizão***, coalizão formada por todos $(\boldsymbol{n})$ os elementos de $\boldsymbol{N}$. Uma vez que ela possibilita o maior resultado (num jogo superaditivo), é razoável supor que se formará, ficando então por saber como esse resultado será distribuído pelos $\boldsymbol{n}$ elementos de $\boldsymbol{N},$ de modo a assegurar que essa distribuição seja estável. A resposta recorre ao conceito de ***imputação***, como sendo uma distribuição exaustiva do valor da grande coalizão pela totalidade dos jogadores.

Deste modo, uma solução deve indicar o montante que cada jogador deve receber, isto é, deve ser uma imputação. Seja $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n})$ o vector dos resultados (recompensas) dos jogadores, em que $\boldsymbol{x_i}$ é o ganho do jogador $\boldsymbol{i}.$ Em geral um vector de resultados não é candidato a ser uma solução do jogo a não ser que seja uma imputação, ou seja, satisfaça:

$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{N}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i}$ **(racionalidade de Grupo)** (2.20)

$\boldsymbol{x_i} \geq \boldsymbol{v}(\{\boldsymbol{i}\}) \quad \forall \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{N}$ **(racionalidade individual)** (2.21)

A condição (2.20) indica que o valor máximo obtido através da supercoalizão é distribuído por todos os elementos, e é também designada por princípio da *eficiência*, ou de Pareto. A condição (2.21) indica que o valor a receber por cada elemento deve ser pelo menos igual ao que receberia actuando sozinho, caso contrário a alocação não seria estável.

Ao conceito de alocação estão ainda associadas outras propriedades, nomeadamente:

- *Existência*: todo o jogo deve ter solução;
- *Simetria:* dois "jogadores simétricos" recebem o mesmo, isto é, $\boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{x_j}$, se $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$ são jogadores simétricos. Dois jogadores, $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$ dizem-se simétricos se $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{S} \cup \{\boldsymbol{i}\}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{S} \cup \{\boldsymbol{j}\}), \forall\, \boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{N} \backslash \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$;
- *Aditividade*: Se um jogo é formado pela soma de dois outros jogos, o valor que cada jogador recebe no novo jogo é igual à soma dos valores obtidos em cada um dos jogos. Matematicamente, se um jogador $\boldsymbol{i}$ recebe $\boldsymbol{x_i}$ no jogo $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{y_i}$ no jogo $\boldsymbol{w}$, então recebe $\boldsymbol{x_i} + \boldsymbol{y_i}$ no jogo $(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$.

Se designarmos por $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{v})$o conjunto de todas as imputações do jogo, expresso na forma de função característica, então uma solução é definida como um subconjunto de $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{v})$. Desta forma surgem vários conceitos de solução, dependendo dos critérios utilizados, seja para eliminar as imputações que não interessam (podem não ser aceitáveis por todos os jogadores, havendo objecções) seja para considerar aquelas que se afigurem aceitáveis (consensuais, equilibradas, estáveis, "justas", etc.). O conjunto de restrições e critérios que rege o processo de negociação e escolha é que definirá os diversos conceitos de solução para um jogo cooperativo.

Nota. Quando um vector de distribuição $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n})$ satisfaz apenas a racionalidade de grupo (propriedade (2.20)), diz-se uma *pré-imputação.* Uma pré-imputação que satisfaz (2.21) é uma imputação, como se disse.

Exemplo 26. No exemplo 21

- $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}) = (\mathbf{100}, \mathbf{100}, \mathbf{100})$ - é uma imputação, pois verifica (2.20) e (2.21);
- $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}) = (\mathbf{50}, \mathbf{200}, \mathbf{50})$ – não é uma imputação, pois $\boldsymbol{x_1} < \boldsymbol{v}(\mathbf{1})$, (2.21) é violada, mas é uma pré-imputação;
- $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}) = (\mathbf{120}, \mathbf{190}, -\mathbf{10})$ – não é uma imputação, pois $\boldsymbol{x_3} < \boldsymbol{v}(\mathbf{3})$, (2.21) é violada, é uma pré-imputação;
- $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}) = (\mathbf{110}, \mathbf{110}, \mathbf{110})$ – não é uma imputação, pois $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}) \neq \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3}$, (2.20) é violada, nem pré-imputação.

14. Núcleo de um Jogo de $\boldsymbol{n}$ −*Pessoas*

Antes de passarmos ao conceito de ***Núcleo*** do jogo, retomemos agora o conceito de ***dominância*** num jogo cooperativo. Considerem-se duas imputações $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n})$ e $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \ldots, \boldsymbol{y_n})$. Perante estas duas imputações, os jogadores estão confrontados pela escolha entre $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$. Qual o critério que determina que uma imputação possa ser preferível a outra?

Excluindo os casos em que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, cujas imputações são iguais, é claro que alguns jogadores preferem $\boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{x}$ (aqueles $\boldsymbol{i}$ em que $y_i > x_i$). Mas como se trata de imputações, isto é, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{N}) = \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{x_i}$, havendo alguns casos em que $y > x$ haverá também outros em que $x > y$, e os jogadores nestas condições preferem $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$, nunca acontecendo que todos prefiram $\boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{x}$ e vice-versa. É por isso necessário que os jogadores que preferem uma imputação à outra sejam suficientemente fortes para fazer valer a sua posição, isto é, cumprir a sua opção. Esta é a essência de dominância através de uma coalizão.

Definição. Diz-se que a imputação $\boldsymbol{y}$ domina a imputação $\boldsymbol{x}$, ou que a imputação $\boldsymbol{x}$ é dominada pela imputação $\boldsymbol{y}$, através da coalizão $\boldsymbol{S}$, e escreve-se $\boldsymbol{y} >^{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{x}$, se

$$\sum_{\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{S}} \boldsymbol{y_i} \leq \boldsymbol{v}(\boldsymbol{S}) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{y_i} > \boldsymbol{x_i}, \quad \forall \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{S} \tag{2.22}$$

1. Se $\boldsymbol{y} >^{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{x}$, então verifica-se:

1. Cada elemento da coalizão $\boldsymbol{S}$ prefere a imputação $\boldsymbol{y}$ à imputação $\boldsymbol{x}$
2. $\sum_{i \in S} y_i \leq v(S)$, os elementos de $\boldsymbol{S}$ podem ameaçar a grande coalizão se $\boldsymbol{x}$ é utilizada, porque o resultado que eles obtêm com a coalizão $\boldsymbol{S}$ é pelo menos igual ao que eles receberiam através de $\boldsymbol{y}$, estando por isso esta remuneração garantida.

Deste modo, se $\boldsymbol{y} >^{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{x}$, então $\boldsymbol{x}$ não deve ser encarada como uma solução uma vez que tem objecções de alguns elementos, isto é, juntando-se através da coalizão $\boldsymbol{S}$ podem receber mais, ou seja, pelo menos $\boldsymbol{y}$, que é preferível a $\boldsymbol{x}$.

Definição. ***Núcleo*** de um jogo, $\boldsymbol{Nu(v)}$, é o conjunto de todas as imputações não dominadas via nenhuma coalizão, isto é, para as quais não existem objecções.

Por outras palavras, é o conjunto de imputações para as quais não existe nenhuma coalizão com valor superior do que a soma dos resultados obtidos com elas, não havendo, consequentemente, incentivo ao abandono da grande coalizão para formar outras coalizões não triviais. O conceito de Núcleo foi apresentado por J. von Neuman e O. Morgenstern como um conceito razoável de solução.

Exemplo 27. No exemplo 21, considerem-se as imputações $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}) = (\mathbf{190}, \mathbf{10}, \mathbf{100})$ e $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{y_3}) = (\mathbf{198}, \mathbf{1}, \mathbf{101})$. Mostrar que $\boldsymbol{y} >^{\{\mathbf{1,3}\}} \boldsymbol{x}$.

Em primeiro lugar, verifica-se que $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ são imputações. Em segundo lugar, verifica-se que em $\boldsymbol{y}$, os jogadores 1 e 3 recebem mais, ambos e cada um deles, do que em $\boldsymbol{x}$. Por outro lado, $\boldsymbol{y}$ possibilita aos jogadores 1 e 3 um total de $299 < 300 = \boldsymbol{v}(\{\mathbf{1}, \mathbf{3}\})$. Claramente $\boldsymbol{y}$ domina $\boldsymbol{x}$ através da coalizão {1, 3}. Se $\boldsymbol{x}$ fosse proposto como solução, ela teria objecções, pois era razoável que os jogadores 1 e 3 se juntassem numa coligação a dois para receberem mais. Em termos práticos o jogador 1 pode vender o terreno ao jogador 3 por um valor acima de 190 e este rentabiliza-o para valer 300, ambos ganhando mais. Por isso $\boldsymbol{x}$ não pode ocorrer.

Teorema. *Uma imputação* $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n})$ *está no Núcleo,* $\boldsymbol{Nu}(\boldsymbol{v})$, *se e só se para qualquer subconjunto* $\boldsymbol{S}$ *de* $\boldsymbol{N}$ $(\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{N})$

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \tag{2.23}$$

Este teorema indica que qualquer que seja a coalizão $\boldsymbol{S}$, uma imputação não dominada, isto é, pertencente ao Núcleo, nunca pode garantir menos do que o que os jogadores obtêm através dessa coalizão. Assim, qualquer imputação pertencente ao Núcleo é estável, na medida em que não existe nenhuma coalizão que possua simultaneamente o incentivo e o poder de mudar o resultado do jogo. Este teorema oferece uma forma prática de calcular o Núcleo, bastando resolver o sistema respectivo.

Exemplo 28. Encontrar o Núcleo do jogo do Exemplo 20. $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3})$ é uma imputação se verificar as seguintes relações:

$\boldsymbol{x_1 \geq 0}$, $\boldsymbol{x_2 \geq 0}$, $\boldsymbol{x_3 \geq 0}$ (racionalidade individual) e $\boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3 = 1\,000}$ (racionalidade de grupo) e está no Núcleo

se e só se $\boldsymbol{x_1 + x_2 \geq 1\,000}$, $\boldsymbol{x_1 + x_3 \geq 1\,000}$, $\boldsymbol{x_2 + x_3 \geq 0}$, $\boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3 \geq 1\,000}$.

Por simples inspecção, verifica-se que $\boldsymbol{x_1^* = 1\,000}$, $\boldsymbol{x_2^* = 0}$, $\boldsymbol{x_3^* = 0}$ é a solução (única) deste sistema de inequações lineares. O Ponto $(\boldsymbol{x_1^*}, \boldsymbol{x_2^*}, \boldsymbol{x_3^*}) = (\boldsymbol{1\,000}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$ é o Núcleo do jogo.

Exemplo 29. Encontrar o Núcleo do jogo do Exemplo 21. $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3})$ é uma imputação se verificar as seguintes relações:

$\boldsymbol{x_1 \geq 100}$, $\boldsymbol{x_2 \geq 0}$, $\boldsymbol{x_3 \geq 0}$ (racionalidade individual) e

$\boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3 = 300}$ (racionalidade de grupo)

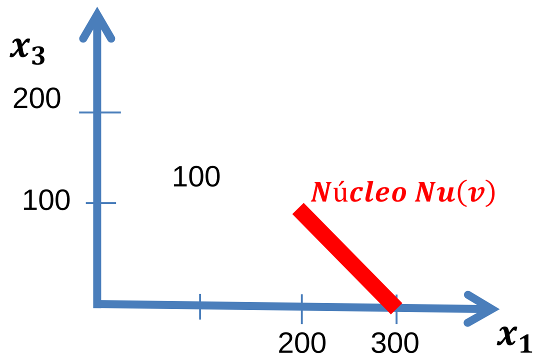
$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3})$ está no Núcleo se e só se

$\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} \geq \mathbf{200}$ $\quad \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_3} \geq \mathbf{300}$ $\quad \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3} \geq \mathbf{0}$ $\quad \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3} \geq \mathbf{300}$

Resolvendo, vem $\boldsymbol{x_2^*} = \mathbf{0}$, ficando $\boldsymbol{x_1} \geq \mathbf{200}$ e $\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_3} = \mathbf{300}$. Então o Núcleo será:

$\boldsymbol{Nu}(\boldsymbol{v}) = \{(\boldsymbol{x_1^*}, \boldsymbol{x_2^*}, \boldsymbol{x_3^*}) \text{: } \mathbf{200} \leq \boldsymbol{x_1^*} \leq \mathbf{300};\ \boldsymbol{x_2^*} = \mathbf{0};\ \boldsymbol{x_3^*} = \mathbf{300} - \boldsymbol{x_1^*}\}$.

Graficamente, tem-se a seguinte representação do Núcleo:



Em termos práticos, esta solução tem uma interpretação muito curiosa. O Jogador 3 (Manuel) cobre o lance do jogador 2 (António), e compra o terreno ao jogador 1 (João) pelo preço $\boldsymbol{x_1^*}$ ($\mathbf{200} \leq \boldsymbol{x_1^*} \leq \mathbf{300}$). Consequentemente o jogador 1 recebe $\boldsymbol{x_1^*}$, e o jogador 3, depois de valorizar o terreno, recebe $\mathbf{300} - \boldsymbol{x_1^*}$. O jogador 2 fica fora do negócio, não recebendo nada. Para que a solução seja estável (solução não dominada), o jogador 3 para cobrir a proposta do jogador 2 pode ter que dar pelo menos 200, que é o valor máximo que o jogador 2 pode dar. Neste caso o núcleo é um conjunto com infinitos pontos.

Em certa medida o núcleo representa o conjunto das soluções “justas”, isto é, um grupo de soluções nas quais ninguém encontraria outra forma melhor de alcançar o mesmo objectivo, não tendo, neste sentido, objecções justificadas. No entanto, enquanto solução apresenta duas reservas importantes:

O núcleo de um jogo pode ser vazio, isto é, o jogo pode não ter Núcleo. Jogos cujo Núcleo não seja vazio, dizem-se *Jogos equilibrados ou balanceados;*

Não sendo vazio, o Núcleo pode não ser único, tendo muitas vezes um número infinito de soluções, o que dificulta a escolha.

Qualquer destas reservas traduz-se em desvantagens de natureza prática. Para resolver a primeira dificuldade, isto é, o núcleo não ter soluções, houve necessidade de estabelecer outras definições para o que é "justo". Neste sentido, foi introduzida por Shapley & Shubik (1966) uma generalização designada por ***Núcleo* – *Epsilon forte*, ou *Núcleo - ε*.**

O Núcleo$-\boldsymbol{\varepsilon}$ difere do Núcleo pela introdução da variável $\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$, associada à diferença entre os dois membro das restrições do Núcleo, de modo a eliminar a impossibilidade no sistema de restrições do mesmo. Matematicamente, o *Núcleo - ε* é dado por

$$\boldsymbol{Nu_{\varepsilon}(v)} = \{\, (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}^n\!: \textstyle\sum_{\boldsymbol{i \in S}} \boldsymbol{x_i} \geq \boldsymbol{v(S)} - \boldsymbol{\varepsilon}, \forall \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{S} \neq \emptyset \text{ e } \mathbf{S} \subset \boldsymbol{N} \;\mathbf{e}\; \boldsymbol{v(N)} = \textstyle\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{x_i} \boldsymbol{\}} \qquad (2.24)$$

Claramente, se o núcleo é vazio, *o Núcleo - ε* será não vazio para $\boldsymbol{\varepsilon}$ a partir de um certo valor. Maschler, Peleg & Shapley (1979), introduziram o conceito de ***Núcleo mínimo*** *(Least Core)* como sendo a intersecção de todos os *Núcleos* - $\boldsymbol{\varepsilon}$ não vazios. Deste modo, o *Núcleo mínimo* pode ser visto como o *Núcleo - ε* para o menor $\boldsymbol{\varepsilon}$ que torna o conjunto não vazio (sistema possível).

Em termos económicos, o *Núcleo - ε* é o conjunto de alocações de resultados onde nenhuma coalizão pode melhorar a sua posição, se for penalizada no montante ε por abandonar a grande coalizão.

Dada a forma como é definido o *Núcleo mínimo,* a sua determinação faz-se através da resolução do seguinte problema de programação linear:

$$\begin{cases} \boldsymbol{Min\varepsilon} \\ \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{v(N)} \\ \sum_{i\in S} \boldsymbol{x_i} + \boldsymbol{\varepsilon} \geq \boldsymbol{v(S)}, \forall \boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{N};\ \boldsymbol{S} \neq \emptyset; \boldsymbol{S} \neq \boldsymbol{N};\ \boldsymbol{x_i} \geq \boldsymbol{0}, \forall \boldsymbol{i}; \boldsymbol{\varepsilon\ livre} \end{cases} \quad (2.25)$$

O valor mínimo $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ chama-se *valor do núcleo mínimo* (*least core value*) do jogo (N, v)**.** É fácil de verificar que o problema de PL (2.25) anterior é equivalente ao problema

$$\boldsymbol{Min\ max\ \ e(x,S)} = \boldsymbol{v(S)} - \sum_{i\in S} \boldsymbol{x_i}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{v(N)}\ \forall \boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{N};\ \boldsymbol{S} \neq \emptyset; \boldsymbol{S} \neq \boldsymbol{N};\ \boldsymbol{x_i} \geq \boldsymbol{0}, \forall \boldsymbol{i}, \quad (2.25a)$$

Ou seja, na determinação do núcleo mínimo e do seu valor aplicamos o princípio do *minimax*.

Nota1. Quando nos jogos de duas pessoas de soma nula determinamos a estratégia mista, transformamos o cálculo do *minimax* e do *maximin* na resolução de um problema de PL, tal como fazemos aqui para determinar o valor do núcleo menor.

Nota 2. Veremos mais à frente, quando apresentarmos o *Nucléolo* de um jogo, que aplicamos o mesmo principio, e que se o problema (2.25) tiver uma solução única, ela é também o *nucléolo* do jogo.

Do exposto resulta que o *Núcleo mínimo* é bem definido e é sempre não vazio, isto é, existe sempre, quer o Núcleo exista ou não, possibilitando sempre pelo menos uma solução para o jogo.

Exemplo 30. Considere um jogo com 4 pessoas e a seguinte função característica (ganhos): $\boldsymbol{v(\{1,2,3\})} = \boldsymbol{v(\{1,2,4\})} = \boldsymbol{v(\{1,3,4\})v} = \boldsymbol{v(\{2,3,4\})} = \boldsymbol{75}$; $\boldsymbol{v(\{1,2,3,4\})} = \boldsymbol{100}$; $\boldsymbol{v(\{\ 3,4\})} = \boldsymbol{60}$ e $\boldsymbol{v(S)} = 0$ para as restantes coalizões $\boldsymbol{S}$.

Verifica-se que o núcleo, $\boldsymbol{Nu(v)}$**,** deste jogo é vazio. Com efeito,

$\boldsymbol{x_1 \geq 0}$; $\boldsymbol{x_2 \geq 0}$; $\boldsymbol{x_3 \geq 0}$; $\boldsymbol{x_4 \geq 0}$; $\boldsymbol{x_1 + x_2 \geq 0}$; $\boldsymbol{x_1 + x_3 \geq 0}$; $\boldsymbol{x_1 + x_4 \geq 0}$; $\boldsymbol{x_2 + x_3 \geq 0}$; $\boldsymbol{x_2 + x_4 \geq 0}$; $\boldsymbol{x_3 + x_4 \geq 60}$

$\boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3 \geq 75}$; $\boldsymbol{x_1 + x_2 + x_4 \geq 75}$; $\boldsymbol{x_1 + x_3 + x_4 \geq 75}$; $\boldsymbol{x_2 + x_3 + x_4 \geq 75}$; $\boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100}$ Das restrições anteriores resulta $\boldsymbol{x_1 \leq 25, x_2 \leq 25}$, $\boldsymbol{x_3 \leq 25}$, $\boldsymbol{x_4 \leq 25}$, que é incompatível com $\boldsymbol{x_3 + x_4 \geq 60}$. Logo as restrições são incompatíveis, isto é, o núcleo é vazio: $\boldsymbol{Nu(v)} = \emptyset$.

Determine-se o **Núcleo -** $\boldsymbol{\varepsilon}$ **:**

$$\boldsymbol{x_1 + x_3 + \varepsilon \geq 0;\ x_1 + x_4 + \varepsilon \geq 0;\ x_2 + x_3 + \varepsilon \geq 0;\ x_2 + x_4 + \varepsilon \geq 0;\ x_3 + x_4 + \varepsilon \geq 60;\ x_1 + x_2 + x_3 + \varepsilon \geq 75;}$$
$$\boldsymbol{x_1 + x_2 + x_4 + \varepsilon \geq 75;\ x_1 + x_3 + x_4 + \varepsilon \geq 75;\ x_2 + x_3 + x_4 + \varepsilon \geq 75;\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100}$$

Verifica-se facilmente que o conjunto das soluções que satisfaz este sistema é não vazio desde que $\boldsymbol{\varepsilon \geq 3,3(3)}$. Por exemplo, a solução $\boldsymbol{x_1 = 21,6(6)}$, $\boldsymbol{x_2 = 21,6(6)}$ $\boldsymbol{x_3 = 28,3(3)}$, $\boldsymbol{x_4 = 28,3(3)}$, com $\boldsymbol{\varepsilon =}$ **3,3(3),** é uma solução do sistema e corresponde ao menor valor para $\boldsymbol{\varepsilon}$. É fácil de verificar que para valores de $\boldsymbol{\varepsilon}$ superiores a 3,3(3), o sistema é possível e para valores inferiores é impossível. Verifica-se que para $\boldsymbol{\varepsilon =}$ **3,3(3)** existe solução alternativa. Por exemplo, a solução $\boldsymbol{x_1 = 28,3(3)}$, $\boldsymbol{x_2 = 15}$; $\boldsymbol{x_3 = 28,3(3)}$, $\boldsymbol{x_4 = 28,3(3)}$, com $\boldsymbol{\varepsilon =}$ **3,3(3)** é igualmente uma solução do sistema e, por isso, faz parte do *Núcleo mínimo*. Veremos mais à frente, quando apresentarmos o Nucléolo, que a primeira solução apresentada é exactamente o *Nucléolo* deste jogo. Nesta solução os jogadores 3 e 4 teriam o incentivo para abandonar a grande coalizão, visto a coalizão $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{3,4}\}$ possibilitar melhores resultados, $\boldsymbol{v(\{3,4\}) = 60}$, mas se existir uma penalização de $\boldsymbol{\varepsilon =}$ **3,3(3),** esse incentivo desaparece, como se disse.

Nota. No exposto temos considerado que a função característica representa os resultados (utilidade ou ganhos) dos jogadores. Em muitos problemas ela representa os custos para cada possível coalizão no jogo. Uma alternativa consiste em considerar custos negativos como ganhos e proceder como até agora. Outra alternativa, porventura de mais fácil interpretação económica, consiste em trabalhar directamente com uma função de custos, e adaptar em conformidade os resultados apresentados, tendo em conta que o critério de racionalidade para cada jogador é ter custos mais baixos, obviamente em articulação com os restantes jogadores no contexto de um jogo cooperativo.

Por exemplo, com uma função característica a representar os custos, no conceito de dominância a relação de ordem dada na definição viria naturalmente alterada. Também a relação de ordem nas propriedades de racionalidade de grupo e racionalidade individual vêm alteradas. De igual forma, as restrições de do tipo (≥) para determinar o Núcleo seriam substituídas por restrições do tipo (≤), mantendo-se assim a coerência. Sem perda de generalidade, iremos proceder desta forma quando estamos perante um problema representado por um jogo cuja função característica envolve custos.

Vimos atrás que o conceito de núcleo apresentava algumas reservas enquanto conceito de solução. O conceito de valor de Shapley, introduzido por Lloyd Shapley (1953) e o conceito de Nucléolo, introduzido por Schmeidler (1969) eliminam estas duas dificuldades, pois existem sempre e apresentam apenas um valor, como veremos mais à frente. Veremos seguidamente o valor de Shapley.

15. Valor de Shapley

Para além das dificuldades anteriores, inexistência e multiplicidade de soluções, podem ocorrer situações de equidade e "justeza" das soluções dadas pelo Núcleo. No exemplo 26 vimos que o Núcleo atribuía todo o valor ao jogador 1. Embora esse possa ser o jogador mais importante, esta atribuição não deixa de levantar problemas de equidade, dado que o jogador 1 sozinho não consegue valorizar a sua inovação.

O valor de Shapley, $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1},\ \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n})$, é um conceito de solução constituído por um critério que distribui, de forma única, pelos participantes no jogo, o valor da grande coalizão, de acordo com quatro axiomas. Esta solução dá em geral um valor mais equitativo e Lloyd Shapley provou que este valor é único.

Axioma 1. Se dois jogos são idênticos, excepto quanto papel (ordem) na qual os seus jogadores aparecem indicados, o valor de Shapley para os jogadores é o mesmo. Ou seja, se por exemplo $\boldsymbol{x} = (\mathbf{10},\ \mathbf{15},\ \mathbf{20})$ é valor de Shapley para um jogo de 3 pessoas, se trocarmos o papel (ordem) dos jogadores 1 e 3, o valor de Shapley para o novo jogo é $\boldsymbol{x} = (\mathbf{20},\ \mathbf{15},\ \mathbf{10})$.

Axioma 2. $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$. O valor de Shapley produz uma distribuição exaustiva do valor da grande coalizão.

Axioma 3. Se um jogador i não adiciona nada a qualquer coalizão, então ele recebe zero de acordo com o valor de Shapley. Ou seja, se $v(S - \{i\}) = v(S)$, para todas as coalizões S, então o valor de Shapley tem $x_i = 0$.

Axioma 4. Se um jogo é formado pela soma de dois outros jogos, o valor de Shapley para o novo jogo é a soma dos valores de Shapley dos jogos iniciais. Ou seja, se x é o valor de Shapley para o jogo v e y o valor de Shapley para o jogo w então $(x + y)$ é o valor de Shapley para o jogo $(v + w)$.

Teorema 3. (Shapley) Dado um jogo com função característica v, existe uma distribuição única $x = (x_1, \ x_2, \ldots, x_n)$ a satisfazer os Axiomas 1- 4 que atribui a cada participante um valor dado por:

$$x_i = \sum_{todos\ os\ S\ que\ não\ contêm\ i} \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!} [v(S \cup \{i\}) - v(S)] \qquad (2.26)$$

Sendo $|S|$ o nº de elementos em $S, n \geq 1$ e $n! = n(n-1) \ldots 2(1)(0! = 1)$.

A expressão (2.26), que indica o valor que cada jogador recebe de acordo com esta forma de distribuição, embora parecendo complexa, tem uma interpretação muito simples.

Com efeito, $[v(S \cup \{i\}) - v(S)]$ representa a contribuição marginal do jogador i para a coalizão S, quando entra nela. Por outro lado, $\frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}$ representa a probabilidade de que no processo aleatório de formação da grande coalizão N, o jogador i se junte a S exactamente naquela ordem.

Para melhor compreender, note-se o seguinte:

- $|\boldsymbol{S}|!$ representa o nº de diferentes formas de formar a coalizão $\boldsymbol{S}$ (sem $\boldsymbol{i}$).
- $(\boldsymbol{n}-|\boldsymbol{S}|-\mathbf{1})!$ representa o nº de formas diferentes de os restantes elementes se juntarem a $\boldsymbol{S}$ e a $\boldsymbol{i}$ para formar a grande coalizão
- $\boldsymbol{n}!$ representa o nº de diferentes formas de formar a grande coalizão $\boldsymbol{N}$

- $\underbrace{|\boldsymbol{S}|(|\boldsymbol{S}|-\mathbf{1})(|\boldsymbol{S}|-\mathbf{2})\ldots(\mathbf{2})(\mathbf{1})}_{\text{Chegam a } \boldsymbol{S}} \quad \underbrace{(\mathbf{1})}_{\text{Chega } \boldsymbol{i}} \quad \underbrace{(\boldsymbol{n}-|\boldsymbol{S}|-\mathbf{1})(\boldsymbol{n}-|\boldsymbol{S}|-\mathbf{2})\ldots(\mathbf{2})(\mathbf{1})}_{\text{Chegam os não pertencentes a } \boldsymbol{S} \cup \boldsymbol{i}} = |\boldsymbol{S}|!\,(\boldsymbol{n}-|\boldsymbol{S}|-\mathbf{1})!$

Como existem $\boldsymbol{n}!$ permutações de $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots \boldsymbol{n}$ jogadores, a probabilidade que jogador $\boldsymbol{i}$ se junte a $\boldsymbol{S}$ exactamente naquela ordem é $\frac{|\boldsymbol{S}|!(\boldsymbol{n}-|\boldsymbol{S}|-\mathbf{1})!}{\boldsymbol{n}!} = \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{S})$.

Por exemplo se considerarmos 3 jogadores, há uma probabilidade de $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}!} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$ que os jogadores cheguem em cada uma das seis sequências seguintes:

$\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3} \qquad \mathbf{2},\ \mathbf{1},\ \mathbf{3} \qquad \mathbf{3},\ \mathbf{1},\ \mathbf{2}$

$\mathbf{1},\ \mathbf{3},\ \mathbf{2} \qquad \mathbf{2},\ \mathbf{3},\ \mathbf{1} \qquad \mathbf{3},\ \mathbf{2},\ \mathbf{1}$

Supõe-se que quando o jogador $\boldsymbol{i}$ chega, ele encontra os jogadores que estão em $\boldsymbol{S}$. Se ele se junta para formar uma coalizão com eles, ele acrescenta o valor $[\boldsymbol{v}(\boldsymbol{S} \cup \{\boldsymbol{i}\}) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{S})]$. Como a probabilidade de isso acontecer é $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{S})$, então a expressão (2.26) indica a contribuição marginal esperada do jogador $\boldsymbol{i}$, e este é o valor que lhe é atribuído. Ou seja, *o valor de Shapley atribui a cada participante a sua contribuição marginal esperada.*

Para finalizar, note-se que o valor de Shapley é uma imputação, pois $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$ e $x_i \geq v(\{i\})$, $\forall i \in N$, e verifica os princípios da simetria e da aditividade, podendo não pertencer ao núcleo e, por isso, não ser estável.

Exemplo 31 (Winston). Três tipos de avião (Piper Cubs, DC-10 e Boeing 707) usam um aeroporto. O Piper Cub necessita de apenas 100 jardas de pista, o DC-10 necessita de 150 jardas de pista e o 707 de 400 jardas. O custo (em euros) de manter uma pista durante o ano é igual ao comprimento da pista (em euros). Por simplicidade, supomos que em cada ano é possível ceder pista a apenas um avião de cada tipo. *Quanto deve ser cobrado a cada avião, dos 400 euros de manutenção da pista?*

Solução. Podemos considerar como um jogo de 3 pessoas, em que o valor de cada coalizão é o custo associado ao tipo de pista que serve os eus elementos. Seja jogador 1= Piper Cub, jogador 2= DC-10 e jogador 3= Boing 707. A função característica, representando custos, é a seguinte:

$v(\{\,\}) = 0$; $v(\{1\}) = 100$; $v(\{2\}) = v(\{1,2\}) = 150$; $v(\{3\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = v(\{1,2,3\}) = 400$

Utilizemos (2.26) através das seguintes tabelas:

jogador 1

S	$p_n(S)$	$[v(S \cup \{i\}) - v(S)]$
{ }	2/6	100
{2}	1/6	0
{3}	1/6	0
{2,3}	2/6	0

x_1 = 200/6

jogador 2

S	$p_n(S)$	$[v(S \cup \{i\}) - v(S)]$
{ }	2/6	150
{1}	1/6	50
{3}	1/6	0
{1,3}	2/6	0

x_2 = 350/6

jogador 3

S	$p_n(S)$	$[v(S \cup \{i\}) - v(S)]$
{ }	2/6	400
{1}	1/6	300
{2}	1/6	250
{1,2}	2/6	250

x_3 = 1850/6

Ou seja, o avião do tipo Piper Cub deve pagar 200/6 euros, o avião tipo DC-10 deve pagar 350/6 euros e o avião tipo Boing 707 deve pagar 1850/6 euros. Total = +200/6 + 350/6 + 1850/6 = 400 euros.

Outra forma seria dispor todas as permutações, que neste caso são seis, numa tabela. Assim:

Ordem Cheg. Prob. Contribuição do jogador

		Jog. 1	Jog. 2	Jog. 3
1, 2, 3	1/6	**100**	**50**	**250**
1, 3, 2	1/6	**100**	**0**	**300**
2, 1, 3	1/6	**0**	**150**	**250**
2, 3, 1	1/6	**0**	**150**	**250**
3, 1, 2	1/6	**0**	**0**	**400**
3, 2, 1	1/6	**0**	**0**	**400**
x_i		**200/6**	**350/6**	**1850/6**

Obs. O valor de Shapley faz uma distribuição muito curiosa e com racionalidade evidente. Com efeito, os custos correspondentes às primeiras 100 jardas são distribuídas pelos três tipos de avião: 100/3. Como o Piper Cub não precisa de mais nada só paga isso. O DC-10 paga 100/3+50/2=350/6, ou seja paga a sua parte nos custos das 100 jardas mais a parte das restantes 50 jardas, juntamente com o boeing 707. Finalmente, o Boeing 707, paga a sua parte das 150 jardas, tal como o DC-10, mais os 250 correspondentes às jardas utilizadas apenas por ele, ou seja 350/6+250/1=1850/6. S. C. LITTLECHILD e OWEN, no artigo *A Simple Expression for the Shapley Value in a Special Case (1973), mostraram* que esta simplificação pode ser feita em certos casos, como este, em que o valor da função característica é igual ao valor individual do seu "maior" jogador e existe uma ordenação do tipo $0 < \boldsymbol{v}(\{\mathbf{1}\}) < \boldsymbol{v}(\{\mathbf{2}\}) < \cdots < \boldsymbol{v}(\{\boldsymbol{n}\})$.

Com a interpretação anterior**,** podemos alocar os custos considerando qualquer número de aviões, ou movimentos deste tipo de aviões**.** Suponhamos, nas condições anteriores, que os custos são de 400 mil€, e que está prevista a seguinte utilização do aeroporto: 10 aviões Piper Cub, 15 aviões DC-10 e 12 Boeing 707. Quanto pagaria cada um deles?

Piper Cub: 100/(10+15+12) = **2,703 mil€**

DC-10: 2,703 + 50/(15+12) = **4,555 mil€**

Boeing 707: 4,555 + 250/12 **= 25,388 mil€**

Total: 2,703*10 + 4,555*15 + 25,388*12 ≈ **400 mil€**

Nota. *A distribuição de custos conjuntos é uma das grandes aplicações da solução de Shapley à Economia e à Gestão, quando estamos perante a utilização comum de infra-estruturas. Shapley foi laureado em 2012 com o Nobel da Economia pelos seus trabalhos na Teoria dos Jogos.*

16. Nucléolo de um Jogo

O Nucléolo, enquanto solução de um jogo cooperativo, usa o conceito de reclamação dos membros da coalizão $\boldsymbol{S}$ em relação á imputação $\boldsymbol{x}$. Num jogo cuja função característica se refere a resultados (ganhos) designamos por $\boldsymbol{e(x,S)=v(S)-\sum_{i\in S}x_i}$ essa reclamação. Neste sentido, o **Nucléolo**, $\boldsymbol{Nc(v)}$**,** é um conceito de solução baseado num critério que escolhe as imputações de modo a minimizar a máxima queixa, ou reclamação, que qualquer coalizão possa ter contra elas.

O procedimento para encontrar o Nucléolo, $\boldsymbol{Nc(v)}$, o que significa aplicar o princípio *minimax* numa função de ganhos (o *maxmin* numa função de custos), exige a comparação entre as diversas imputações, de forma a encontrar aquela cuja máxima reclamação associada a ela seja menor do que a máxima queixa associada a qualquer outra imputação. Para isso ordenam-se as coalizões (excluindo $\emptyset$ e $\boldsymbol{N}$, por motivos de simplificação, pois não são determinantes na escolha, já que $\boldsymbol{e(x,\emptyset)=e(x,N)=0}$, embora estas possam incluídas), $\boldsymbol{S_1, S_2,\dots,S_{2^n-2}}$, contidas em $\boldsymbol{N}$ e constroi-se um função $\boldsymbol{e(x,S)=[e_1(x,S_1),e_2(x,S_2),\dots,e_{2^n-2}(x,S_{2^n-2})]}$ em ordem não crescente, ou seja:

$$\boldsymbol{e(x,S)=\begin{bmatrix} e_1(x,S_1)\\ e_2(x,S_2)\\ \dots\\ e_{2^n-2}(x,S_{2^n-2})\end{bmatrix}}$$ e onde $\boldsymbol{S_1,\dots,S_{2^n-2}}$ estão ordenados de forma que $\boldsymbol{e_j(x,S_j)\geq e_{j+1}(x,S_{j+1})}$, para $\boldsymbol{j=1,2,\dots 2^n-3}$.

À luz do que foi dito, o Núcleo do jogo, no caso de existir, pode ser então apresentado de uma outra forma. Sendo $X(v)$ o conjunto de todas as imputações (vectores de remuneração), o Núcleo é dado por:

$$\boldsymbol{Nu(v)=\{x\epsilon X(v): \max_{S\subset N} e(x,S)\leq 0\}} \qquad (2.27)$$

Ou seja, o Núcleo é o conjunto de todas as imputações (HEIN) contra as quais não possam existir máximas reclamações que não sejam menores ou iguais a zero.

O Nucléolo, com uma função de ganhos, é o conjunto das imputações $\boldsymbol{x \epsilon X(v)}$ que minimizam lexicograficamente $\boldsymbol{e(x,S)}$. A ordem lexicográfica entre dois vectores pode ser definida da seguinte forma:

Dados dois vectores $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1},\ \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n})$ e $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y_1},\ \boldsymbol{y_2}, \dots, \boldsymbol{y_n})$, diz-se que $\boldsymbol{x}$ é estritamente menor lexicograficamente que $\boldsymbol{y}$, e escreve-se $\boldsymbol{x} \prec_{\boldsymbol{L}} \boldsymbol{y}$, se $\boldsymbol{x_1} < \boldsymbol{y_1}$ ou se existe um inteiro $\boldsymbol{i} > \boldsymbol{0}$ tal que $\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{y_1} \dots \boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{y_i}$ e $\boldsymbol{x_{i+1}} < \boldsymbol{y_{i+1}}$, $\forall i = 1 \dots n-1$.

Por exemplo, (1, 2, 5, 7) é lexicograficamente inferior a, ou precede, (2, 2, 2, 9). Também (3, 3, 3, 8) é lexicograficamente inferior a (3, 3, 4, 5).

A partir da relação anterior, a relação de menor ou igual lexicograficamente pode ser definida como $\boldsymbol{x} \preccurlyeq_{\boldsymbol{L}} \boldsymbol{y}$ se $\boldsymbol{x} \prec_{\boldsymbol{L}} \boldsymbol{y}$ ou $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

Considerando os vectores de reclamações $\boldsymbol{e(x,S)}$, o **Nucléolo** é o conjunto das imputações $\left(\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{v(N)}\right)$ definido por:

$$\boldsymbol{Nc(v)} = \{\boldsymbol{x \epsilon X(v)} : \forall\ \boldsymbol{y \epsilon X(v)} \Rightarrow \boldsymbol{e(x,S)} \preccurlyeq_{\boldsymbol{L}} \boldsymbol{e(y,S)}\} \qquad (2.28)$$

Isto é, as imputações que têm menores queixas, lexicograficamente, associadas a elas. Desta forma considera-se a imputação que minimiza o protesto da coalizão mais descontente. O *Nucléolo* de um jogo cooperativo é a imputação cujo desvio $\boldsymbol{e(x,S)}$ (reclamação) aparece em primeiro lugar na ordenação lexicográfica.

Nota. No caso de a função característica ser uma função de custos, o que ocorre em muitos problemas práticos, a mesma pode ser transformada, através do seu simétrico, numa função de ganhos, e proceder como anteriormente. Alternativamente, podemos fazer o desenvolvimento directamente a partir da função original, o que significa *deixar os menos satisfeitos o mais satisfeitos possível,* o que significa aplicar o princípio do *maxmin*. Neste caso ordenam-se por ordem não decrescente as componentes de $\boldsymbol{e(x,S)} = \boldsymbol{v(S)} - \sum_{\boldsymbol{i \in S}} \boldsymbol{x_i}$ e escolhe-se a imputação lexicograficamente menor, isto é, cujo primeiro termo é maior.

Note-se que para cada imputação, ao primeira componente de $\boldsymbol{e(x,S)}$ indica a menor satisfação, e pretende-se que esse valor seja o maior de entre todas as imputações, falando-se por isso em maximizar a satisfação mínima.

O nucléolo é então o conjunto das imputações $\boldsymbol{x\epsilon X(v)}$ que maximizam lexicograficamente $\boldsymbol{e(x,S)}$, ou seja:

$$\boldsymbol{Nc(v) = \{x\epsilon X(v) \colon \forall\, y\epsilon X(v) \Rightarrow e(x,S) \succcurlyeq_L e(y,S)\}} \qquad (2.29)$$

O Nucléolo goza de várias propriedades importantes, que o tornam, juntamente com o valor de Shapley, de uso recomendado como solução de um jogo cooperativo. Referimos as mais importantes:

- Desde que o conjunto das imputações, $\boldsymbol{X(v)}$, seja compacto, o Nucléolo existe sempre, mesmo que o Núcleo seja vazio (*existência*);
- Se $\boldsymbol{X(v)}$ for compacto e convexo, o Nucléolo é único (*unicidade*);
- No caso de o Núcleo não ser vazio, o Nucléolo está contido no Núcleo;
- O Nucléolo está sempre contido no *kernel* (ver á frente definição de kernel), o que significa que se o Kernel está contido no Conjunto-Negociação (ver definição mais à frente), também o nucléolo faz parte deste.

Desde a introdução em 1969, por Schmeidler, vários algoritmos têm sido propostos para determinar o *Nucléolo,* a maior parte resolvendo problemas de programação linear (PL). Nalguns casos resolvendo um único problema, embora grande, noutros uma sequência de problemas de problemas de PL mais pequenos: Kohlberg (1972), Owen (1974), Maschler, Peleg e Shapley (1979), Behring (1981), Dragan(1981), Sankaran (1991), Solimosi e Raghavan(1994), Potters, Reijnierse e Ausing (1996) e Fromen (1997). Vamos apresentar uma resolução baseada no algoritmo Maschler e al, a partir de uma proposta de Granot e Huberman (1984), e que consiste na resolução sucessiva de vários problemas de programação linear, seleccionando inicialmente as soluções que que tenham associados os menores excessos (reclamações) máximas. Supondo, como habitualmente, uma função característica de ganhos, com valores não negativos, (a adaptação a uma função de custos é fácil, como se verá num exemplo), o primeiro problema será:

P(1)

$$\begin{cases} Min \varepsilon_1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = v(N) \\ \sum_{i \in S} x_i + \varepsilon_1 \geq v(S), \forall \boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{N};\ S \neq \emptyset; S \neq N;\ x_i \geq 0, \forall i; \varepsilon_1\ livre \end{cases} \tag{2.30}$$

Se a solução óptima encontrada for única, o processo pára, não sendo necessário prosseguir (Litltlechild, 1974)). Caso contrário, será a partir do conjunto solução de *PL(1)* que se irá resolver o problema seguinte, *PL(2).* O procedimento consiste em usar o conjunto de coalizões mais "insatisfeito", designado por *SOL(1)*, como conjunto de busca para o problema linear seguinte, a cuja resolução se procede. Este conjunto é constituído pelas restrições saturadas (activas) na solução óptima de *PL(1).* O segundo problema virá então:

PL(2)

$$\begin{cases} Min \varepsilon_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = v(N) \\ \sum_{i \in S} x_i = v(S) - \varepsilon_1, \forall S \in SOL(1) \\ \sum_{i \in S} x_i + \varepsilon_2 \geq v(S); \forall\, \boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{N};\ S \notin SOL(1);\ S \neq \emptyset; S \neq N; \\ x_i \geq 0, \forall i; \varepsilon_2 livre \end{cases} \tag{2.31}$$

Se existirem restrições não saturadas (não activas), passa-se a novo problema de programação linear, *PL(3),* e assim sucessivamente até que todas as restrições se encontrem saturadas, caso em que o processo termina. A solução do último problema será então o Nucléolo do jogo.

Portanto, o nucléolo primeiro tenta satisfazer as coalizões mais “infelizes” (insatisfeitas), e a seguir as segundas mais “infelizes” (insatisfeitas) e assim sucessivamente.

Nota. Kopelowitz propôs um algoritmo para calcular o nucléolo utilizando uma sequência no máximo de n-1 problemas de programação linear, sendo n o número de jogadores.

Exemplo 32. Considere-se um conjunto de utilizadores que se juntam para construir uma rede que os ligue a um fornecedor comum. A rede final de custo mínimo será obtida através da obtenção da árvore geradora mínima. Suponha-se, por agora, que a função característica que indica a rede (árvore) de menor custo para cada coalizão é a seguinte:

$$\boldsymbol{v(\{\ \}) = 0;\ v(\{1\}) = v(\{3\}) = 5;\ v(\{2\}) = 8;\ v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = 10;\ v(\{1,2,3\}) = 14}$$

Como a função característica é de custos (aplicamos o principio do *maxmin*), o primeiro e o segundo problemas de PL serão (neste caso $\boldsymbol{\varepsilon_1}$ e $\boldsymbol{\varepsilon_2}$ são não negativos):

$$PL(1)\quad \left\{\begin{array}{c} Max\varepsilon_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 14 \\ x_1 + x_2 + \varepsilon_1 \le 10 \\ x_1 + x_3 + \varepsilon_1 \le 10 \\ x_2 + x_3 + \varepsilon_1 \le 10 \\ x_1 + \varepsilon_1 \le 5; x_2 + \varepsilon_1 \le 8; x_3 + \varepsilon_1 \le 5 \\ x_i \ge 0, \forall i; \varepsilon_1 \ge 0 \end{array}\right.$$

$$PL(2)\quad \left\{\begin{array}{c} Max\varepsilon_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 14 \\ x_1 + x_2 = 9{,}5 \\ x_1 + x_3 + \varepsilon_2 \le 10 \\ x_2 + x_3 + \varepsilon_2 \le 10 \\ x_1 + \varepsilon_2 \le 5; x_2 + \varepsilon_2 \le 8; x_3 = 4{,}5 \\ x_i \ge 0, \forall i; \varepsilon_2 \ge 0 \end{array}\right.$$

A solução óptima do primeiro problema é: $\boldsymbol{x_1^* = 4,5;\ x_2^* = 5;\ x_3^* = 4,5;\ \varepsilon_1^* = 0,5.}$ Nesta, as restrições saturadas (activas) correspondem às coalizões {3} e {1,2}, que constituem o conjunto *SOL(1).* A solução do segundo problema é $\boldsymbol{x_1^* = 4,5;\ x_2^* = 5;\ x_3^* = 4,5;\ \varepsilon_2^* = 0,5}$.

As restrições saturadas correspondem às coalizões {1} e {2,3}, sendo *SOL(2)*={{1}, {3}, {1,2}, {2,3}}. Podíamos passar ao terceiro problema, mas neste caso é desnecessário, uma vez que como as coalizões individuais {1} e {3} pertencem ao *SOL(2)* , sabemos que $\boldsymbol{x_1^*} = 4{,}5$ e $\boldsymbol{x_3^*} = 4{,}5$, obtendo-se por diferença da grande coalizão, o valor $\boldsymbol{x_2^*} = 5$.

A solução óptima é: $\boldsymbol{x_1^*} = 4{,}5$; $\boldsymbol{x_2^*} = 5$; $\boldsymbol{x_3^*} = \mathbf{4{,}5}$. O Nucléolo é então $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}) = (4{,}5; 5; 4{,}5)$, cujo menor excesso relativo é 0,5. Como o núcleo é não vazio, obviamente o nucléolo pertence ao núcleo, como facilmente se constata.

O valor de Shapley para este jogo é: $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}) = (25/6; 34/6; 25/6) \cong (4{,}2;\ 5{,}6;\ 4{,}2)$. Neste caso, o valor de Shapley pertence ao núcleo, como facilmente se verifica, tratando-se de uma solução não dominada.

Consideremos três diferentes soluções, todas pertencentes ao Núcleo, muito próximas, sendo duas delas as anteriores, e analisemos a *máxima das satisfações mínimas* (principio do *maxmin* na determinação do nucléolo): (4,5; 5,0; 4,5), (4,2; 5,6; 4,2), e (4,0; 6,0; 4,0) . Calculemos $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{S}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{S}) - \sum_{i \in S} \boldsymbol{x_i}$, excepto para $\boldsymbol{S} = \emptyset$ e $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{N}$.

$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{S})$ **Ordenação não decrescente**

S	$v(S)$	(4,5; 5,0; 4,5)	(4,2; 5,6; 4,2)	(4,0; 6,0; 4,0)	(4,5; 5,0; 4,5)	(4,2; 5,6; 4,2)	(4,0; 6,0; 4,0)
{1}	5	0,5	0,8	1	0,5	0,2	0
{2}	8	3,0	2,4	2	0,5	0,2	0
{3}	5	0,5	0,8	1	0,5	0,8	1
{1, 2}	10	0,5	0,2	0	0,5	0,8	1
{1, 3}	10	1,0	1,6	2	1,0	1,6	2
{2, 3}	10	0,5	0,2	0	3,0	2,4	2

Verifica-se que a solução (4,5; 5,0; 4,5), correspondente ao Nucléolo, é lexicograficamente a maior, como se esperava, e em que a satisfação mínima (o excesso) é máxima.

O valor de Shapley, dada a sua natureza penaliza mais o jogador 2, pois é o que tem custos mais elevados se actuar sozinho, (quem mais ganha com a cooperação contribui mais para quem menos ganha com ela) enquanto o nucléolo dá um valor mais igualitário entre os jogadores, independentemente de quem custa mais ou menos. Um bom entendimento das condições do problema ajuda a escolher a opção mais apropriada.

Exemplo 33. Aplicando o procedimento descrito atrás, o nucléolo do exemplo 31 (tarifa no aeroporto) é: (50; 50; 300). A solução de Shapley é, como se viu, (200/6; 350/6; 1850/6) ≅ (33,3; 58,3, 308,6). Consideremos ainda uma outra solução, por exemplo, (40; 55; 305), e façamos uma análise semelhante para comparar os excessos em termos lexicográficos.

$\boldsymbol{e(x, S)}$

S	$v(S)$	(50; 50; 300)	(33,3; 58,3; 308,6)	(40; 55; 305)
{1}	100	50	66,7	60
{2}	150	100	91,7	95
{3}	400	100	91,4	95
{1, 2}	150	50	58,4	55
{1, 3}	400	50	58,1	55
{2, 3}	400	50	33,1	40

Ordenação não decrescente

(50; 50; 300)	(33,3; 58,3; 308,6)	(40; 55; 305)
50	33,1	40
50	58,1	55
50	58,4	55
50	66,7	60
100	91,4	95
100	91,7	95

Verifica-se novamente que a solução (50; 50; 300), correspondente ao Nucléolo, é lexicograficamente a maior, como se esperava, e em que a satisfação mínima (o excesso) é máxima.

O valor de Shapley, dada a sua natureza beneficia mais o jogador 1, pois é o que tem custos mais baixos se actuar sozinho, (quem mais ganha com a cooperação contribui mais para quem menos ganha com ela) enquanto o nucléolo dá um valor mais igualitário entre os jogadores, independentemente de quem custa mais ou menos. Portanto, conclusões semelhantes às anteriores.

Exemplo 34. Considerando o exemplo 20, vimos no exemplo 29 que o núcleo é constituído apena por um ponto: (1000; 0; 0). O nucléolo deste jogo é também o ponto (1000; 0; 0) (o nucléolo está contido no núcleo, sendo este não vazio), ou seja, estes dois conceitos de solução imputam totalmente ao jogador 1 os resultados do jogo, o que parece um contrassenso, já que este sozinho não consegue rentabilizar a sua descoberta. O valor de Shapley é (4000/6; 1000/6, 1000/6), e faz neste caso uma distribuição mais equitativa, e viabilizando o negócio. Este tipo de situação justifica talvez a principal crítica ao nucléolo.

17. Outros Conceitos de Solução

O Núcleo é um conceito bastante intuitivo e fácil de calcular, mas levanta alguns problemas na sua utilização, devido á sua pouca equidade nalguns casos, podendo mesmo não existir, noutros casos. Já o valor de Shapley tem uma lógica bastante robusta, ao imputar a cada jogador o seu contributo marginal, é de fácil utilização, embora o seu cálculo seja bastante laborioso quando o número de jogadores é elevado, mas tem o inconveniente de por vezes não pertencer ao núcleo, isto é, não ser uma solução não dominada e a coberto de ameaças à formação de outras coalizões. O nucléolo tem também uma lógica bastante robusta, mas, para além de o seu cálculo ser também bastante laborioso, as suas soluções nem sempre incorporarem, adequadamente segundo alguns, o contributo dos diversos jogadores. Por outro lado, podem ocorrer situações como a do exemplo anterior (exemplo 34). Mas não há dúvida que o nucléolo e o valor de Shapley são os dois conceitos de solução mais consensuais e, por isso, mais utilizados. Têm também a vantagem de serem bastante intuitivos e fáceis de interpretar (juntamente com o núcleo), o que faz deles, na nossa opinião, os mais importantes. No entanto, existem outros, cujos principais indicaremos brevemente a título meramente informativo.

17.1 Conjunto-solução de Neumann-Morgenstern

O ***Conjunto estável***, também conhecido como ***Conjunto-solução*** *de J. von Neumann-Morgenstern*, $\boldsymbol{NM(v)}$**,** fo**i** o primeiro conceito de solução proposto para jogos cooperativos com mais de 2 pessoas, proposto pelos seus autores em 1944. O conjunto estável baseia-se no conceito de dominância, já abordado atrás, e é constituído pelas imputações que satisfazem as propriedades seguintes:

- *Estabilidade interna.* Nenhuma imputação no conjunto estável é dominada por qualquer outra imputação nesse conjunto;
- *Estabilidade externa*. Qualquer imputação fora do conjunto estável é dominada por pelo menos uma imputação neste conjunto.

J.von Neumann e O. Morgenstern viram no conjunto estável uma espécie de conjunto de normas e comportamentos aceitáveis numa sociedade. Nenhum comportamento é claramente preferido por outro, no entanto, para qualquer comportamento inaceitável existe sempre um outro aceitável que é preferido como alternativa.

Como se pode entender, esta definição é de caracter muito geral e levanta algumas dificuldades de aplicação. O conjunto estável é em geral difícil de encontrar. Outra dificuldade do *conjunto estável de von Neuman-Morgenstern* reside no facto de não estar garantida a sua existência (Lucas, 1969) nem a sua unicidade (Lucas, 1992). Por isso este conceito não é muito utilizado, tendo surgido outros conceitos depois deste, alguns deles já analisados.

17.2 Conjunto-negociação

Uma das dificuldades apontadas aos anteriores conceitos de solução é que não espelham o que se passa ao longo do jogo, nomeadamente no processo de negociação. O ***conjunto-negociação*** (*bargainning set*), devido a R. Aumann e a M. Mascheler (1961), é obtido considerando o processo de discussão e ajustamento que pode ter lugar durante um jogo cooperativo, tendo em conta as possíveis ameaças ou objecções e contra-ameaças que podem ser feitas pelos vários jogadores.

Definição. Designa-se por *estrutura de coalizão* de um jogo de $\boldsymbol{n}$ -pessoas uma partição do conjunto $\boldsymbol{n}$ dos jogadores, isto é, $\boldsymbol{\mathcal{T}} = \{\boldsymbol{T_1}, \boldsymbol{T_2}, \dots, \boldsymbol{T_m}\}$

O conjunto dos jogadores é dividido em coalizões mutuamente disjuntas, ou seja, sem elementos comuns. Supondo que essa estrutura se verifica, então o valor obtido por cada coalizão T_k, com $k = 1, \dots, m,$ e dividido pelo seus membros, é dado por $v(T_k)$. Resta saber como será dividido.

Definição. Uma *configuração de recompensas* (*payoff configuration*), ou alocação de resultados, é um par do tipo $(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{\mathcal{T}}) = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n};\ \boldsymbol{T_1}, \boldsymbol{T_2}, \dots, \boldsymbol{T_m}),$

em que $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ é uma estrutura de coalizão e $\boldsymbol{x}$ é um vector de resultados que satisfaz a relação

$$\sum_{i \in T_k} \boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{T_k}),\ \text{para } \boldsymbol{k} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \dots, \boldsymbol{m}. \qquad (2.32)$$

Para ser aceite, uma condição é que a configuração de recompensas satisfaça a racionalidade individual, ou seja, verifique

$$\boldsymbol{x_i} \geq \boldsymbol{v}(\{\boldsymbol{i}\}), \forall \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{N} \qquad (2.33)$$

Outro requisito possível é que nenhuma coalizão T_k se formará se alguma das suas subcoalizões puder obter mais do que a recompensa dada por $\boldsymbol{x}$, devendo, por isso verificar-se

$$\sum_{i \in S} \boldsymbol{x_i} \geq \boldsymbol{v}(\boldsymbol{S}) \quad \text{para} \quad \boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{T_k} \in \boldsymbol{\mathcal{T}} \qquad (2.34)$$

Quando uma configuração de recompensas verifica (2.33), diz-se individualmente racional (c.r.i.r.) e quando satisfaz (2.34) diz-se coalizionalmente racional (c.r.c.r.).

Exemplo 35. Para ilustrar este aspecto, da estabilidade, da c.r.c.r., considere-se um jogo simples de 3-pessoas, em que as coalizões com mais de um elemento têm o valor 1 e as restantes têm o valor zero. Trata-se de um jogo normalizado (0,1), com a seguinte função característica: $\boldsymbol{v}(\emptyset) = \boldsymbol{v}(\{\mathbf{1}\}) = \boldsymbol{v}(\{\mathbf{2}\}) = \boldsymbol{v}(\{\mathbf{3}\}) = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{1},\mathbf{2}\}) = \boldsymbol{v}(\{\mathbf{1},\mathbf{3}\}) = \boldsymbol{v}(\{\mathbf{2},\mathbf{3}\}) = \boldsymbol{v}(\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3}\}) = \mathbf{1}$**.**

Formando-se a coalizão {1, 2}, é natural a alocação (1/2, 1/2, 0). Porém, qualquer dos dois jogadores pode procurar obter mais do outro ameaçando juntar-se ao jogador 3 se a sua pretensão não for satisfeita. Isto é, por exemplo o jogador 1 pode ameaçar com a coalizão {1, 3}, obtendo, por exemplo, uma alocação (3/4, 0, 1/4). Perante esta ameaça, ou objecção, o jogador 2 pode combatê-la chamando a atenção que nestas circunstâncias tentará avançar com uma coalizão {2, 3}, oferecendo ao jogador 3 um valor de 1/2, através da alocação (0, 1/2, 1/2). Portanto, o jogador 2 tem uma contra objecção, ou contra-ameaça que "protege" o seu ganho de 1/2.

Isto pode ser expressa matematicamente. É o que faremos de seguida.

Definição. Seja $\boldsymbol{\mathcal{T}} = \{\boldsymbol{T_1}, \boldsymbol{T_2}, \dots, \boldsymbol{T_m}\}$ uma estrutura de coalizão, e $\boldsymbol{K}$ uma coalizão. Então, os *parceiros (partners)* de $\boldsymbol{K}$ na estrutura $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ são os elementos do conjunto

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{K};\ \boldsymbol{\mathcal{T}}) = \{\boldsymbol{i}: \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{T_k}, \boldsymbol{T_k} \cap \boldsymbol{K} \neq \emptyset\} \qquad (2.35)$$

Obtida uma c.r.c.r., quando ou que condições deve ter para ser estável? Em primeiro lugar, se for uma imputação pertencente ao núcleo do jogo, obviamente que será estável, no sentido em que não haverá nenhuma outra coalizão com poder suficiente para alterá-la, já que a imutação não é dominada através de qualquer outra coalizão (pertence ao núcleo). Mas se o núcleo for vazio, a situação muda de figura.

Ou seja, um jogador $\boldsymbol{i}$ é parceiro de $\boldsymbol{K}$ na estrutura $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ se ele pertence à mesma coalizão $\boldsymbol{T_k}$ que alguns membros de $\boldsymbol{K}$. A ideia subjacente ao conceito de parceiro é que os membros de $\boldsymbol{K}$ para garantirem a sua remuneração na c.r.c.r. $(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{\mathcal{T}})$ apenas necessitam do consentimento dos seus parceiros e de mais ninguém.

Definição. Seja $(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{\mathcal{T}})$ uma c.r.c.r. para o jogo $(\boldsymbol{N},\boldsymbol{v})$**,** e $\boldsymbol{K}$ e $\boldsymbol{L}$ dois subconjuntos não vazios e disjuntos de algum $\boldsymbol{T_k} \in \boldsymbol{\mathcal{T}}$. Uma *objecção* de $\boldsymbol{K}$ contra $\boldsymbol{L}$ é uma c.r.c.r. $(\boldsymbol{y};\ \mathcal{U})$ a satisfazer:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{K};\mathcal{U}) \cap \boldsymbol{L} = \emptyset \tag{2.36}$$

$$\boldsymbol{y_i} > \boldsymbol{x_i}, \qquad \forall \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{K} \tag{2.37}$$

$$\boldsymbol{y_i} \geq \boldsymbol{x_i}, \qquad \forall \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{K};\mathcal{U}) \tag{2.38}$$

Definição. Seja $(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{\mathcal{T}})$ uma c.r.c.r. para o jogo $(\boldsymbol{N},\boldsymbol{v})$**,** e $\boldsymbol{K}$ e $\boldsymbol{L}$ dois subconjuntos não vazios e disjuntos de algum $\boldsymbol{T_k} \in \boldsymbol{\mathcal{T}}$. Seja $(\boldsymbol{y};\ \mathcal{U})$ uma *objecção* de $\boldsymbol{K}$ contra $\boldsymbol{L}$**.** Uma contra objecção de $\boldsymbol{L}$ contra $\boldsymbol{K}$ é uma c.r.c.r. $(\boldsymbol{z};\ \mathcal{V})$ a satisfazer:

$$\boldsymbol{K} \not\subset \boldsymbol{P}(\boldsymbol{L};\mathcal{V}) \tag{2.39}$$

$$\boldsymbol{z_i} > \boldsymbol{x_i}, \qquad \forall \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{L};\mathcal{V}) \tag{2.40}$$

$$\boldsymbol{z_i} \geq \boldsymbol{y_i}, \qquad \forall \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{L};\mathcal{V}) \cap \boldsymbol{P}(\boldsymbol{K};\mathcal{U}) \tag{2.41}$$

Em síntese, os membros de $\boldsymbol{K}$, na sua objecção contra $\boldsymbol{L}$, reivindicam que podem ganhar mais mudando para uma nova c.r.c.r., e que os novos parceiros irão concordar. Os membros de $\boldsymbol{L}$ podem contra objectar desde que lhes seja possível encontrar uma terceira c.r.c.r. de acordo com a qual eles e os seus parceiros tenham ganhos pelo menos iguais aos que tinham originalmente. Caso seja necessário "mobilizar" alguns parceiros de $\boldsymbol{K}$ para o efeito, eles possibilitar-lhe-ão ganhos pelo menos iguais aos da objecção c.r.c.r.. Note-se que pode eventualmente ser necessário para $\boldsymbol{L}$ mobilizar alguns membros de $\boldsymbol{K}$ como parceiros, mas não obrigatoriamente todos.

Definição. Uma c.r.c.r. $(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{\mathcal{T}})$ é considerada *estável* se perante qualquer objecção de $\boldsymbol{K}$ contra $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{L}$ tem uma contra-objecção. O ***Conjunto-negociação*****,** $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, é o conjunto de todas as c.r.c.r.´s estáveis.

Como esta definição deixa em aberto a questão do número de jogadores que podem fazer objecções e contra objecções, especifica-se o conjunto-negociação como $\boldsymbol{\mathcal{B}}_1$, como sendo o conjunto de todas as c.r.c.r.´s $(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\mathcal{T}})$ tais que, sempre que qualquer coalizão $\boldsymbol{K}$ tenha uma objecção contra a coalizão $\boldsymbol{L}$, existe pelo menos um membro de $\boldsymbol{L}$ que tem uma contra objecção. Tem-se ainda que $\boldsymbol{\mathcal{B}} \subset \boldsymbol{\mathcal{B}}_1$ (Owen, obra citada).

Definição. Diz-se que uma *objecção faz sentido* ou *se justifica*, quando não existe relativamente a ela qualquer contra objecção.

O conjunto-negociação é constituído pela união do conjunto das imputações que não têm objecções e o conjunto das imputações que têm objecções, mas não justificadas. Se imaginarmos o processo negocial, o conjunto-negociação constitui o conjunto das imputações que restam depois de eliminadas as que têm uma objecção e essa objecção é justificada (OWEN, 1968). Desta definição resulta que o Núcleo, caso exista, está contido no conjunto-negociação. Portanto, o conjunto-negociação é um conjunto estável. No caso de o núcleo não existir, existe ainda a possibilidade de encontrar solução no conjunto-negociação, o que constitui uma vantagem em relação aquele. No entanto, apresenta muitos dos seus inconvenientes, nomeadamente no seu cálculo, por um lado, e pelo facto de poder não ser único, por outro.

Exemplo 36 (R. J Aumann e M. Maschler**)**. Considere-se o seguinte jogo (não superaditivo): $\boldsymbol{v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{1,2,3\}) = 0}$; $\boldsymbol{v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = 100}$; $\boldsymbol{v(\{2,3\}) = 50}$.

A distribuição $\boldsymbol{x} =$ (80, 20,0) através da coalizão {1,2} tem uma objecção do jogador 2, dada por $\boldsymbol{y} =$ (0, 21, 29) através da coalizão {2, 3}. Estamos perante uma objecção (do jogador 2) a $\boldsymbol{x}$ que não tem contra objecção (do jogador 1), isto é, que se justifica.

A distribuição $\boldsymbol{x} =$ (75, 25, 0) através da coalizão {1,2} tem uma objecção do jogador 2 dada por $\boldsymbol{y} =$ (0, 26, 24) através da coalizão {2, 3}. Estamos perante uma objecção do jogador 2, mas existe uma contra objecção do jogador 1 avançando com $\boldsymbol{z} =$ (75, 0, 25) através da coalizão {1, 3}, ou uma objecção do jogador 1 dada por $\boldsymbol{y} =$ (76, 0, 24) através da coalizão {1,3}, que tem uma contra objecção do jogador 2 dada por $\boldsymbol{z} =$ (0, 25, 25) através da coalizão {2,3}.

17.3 Kernel

O *kernel*, designado por $\boldsymbol{K(v)}$**,** foi introduzido por Davis e Maschler (1965), está relacionado com o conjunto-negociação. Está baseado na ideia básica de desvio ou reclamação. Considere-se um jogo $(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{v})$ cooperativo, e o par de jogadores $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l} \in \boldsymbol{N}$, e defina-se o excedente do jogador $\boldsymbol{k}$ contra o jogador $\boldsymbol{l}$ na alocação $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n})$, não necessariamente uma imputação, da seguinte forma:

$$\boldsymbol{s_{kl}(x)} = \max_{\boldsymbol{k \in S, l \notin S}} \{\boldsymbol{v(S)} - \textstyle\sum_{\boldsymbol{i \in S}} \boldsymbol{x_i}\} \qquad (2.42)$$

Ou seja, o máximo que o jogador $\boldsymbol{k}$ pode conseguir, nas melhores circunstâncias, a partir de $\boldsymbol{x}$ sem contar com a cooperação de $\boldsymbol{l}$**.**

Intuitivamente, o jogador $\boldsymbol{k}$ tem mais poder negocial do que o jogador $\boldsymbol{l}$ relativamente a uma alocação $\boldsymbol{x}$, e representa-se por $\boldsymbol{k} \gg \boldsymbol{l}$, se

$\boldsymbol{s_{kl}(x)} > \boldsymbol{s_{lk}}\ (\boldsymbol{x})$ e $\boldsymbol{x_l} > \boldsymbol{v(\{l\})}$

Em certo sentido, se $\boldsymbol{k} \gg \boldsymbol{l}$, isto significa que $\boldsymbol{k}$ tem um certo poder sobre $\boldsymbol{l}$, que este não pode contestar. O que não acontece se $\boldsymbol{x_l} = \boldsymbol{v(\{l\})}$**,** pois neste caso $\boldsymbol{l}$ pode obter um ganho idêntico exclusivamente à sua custa, ficando por isso imune ao poder de $\boldsymbol{k}$.

O *kernel* é dado por:

$$\boldsymbol{K(v)} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X(v)}: \boldsymbol{s_{kl}(x)} = \boldsymbol{s_{lk}(x)}, \forall \boldsymbol{k}, \boldsymbol{l} \in \boldsymbol{N}\} \qquad (2.43)$$

Portanto**,** nas alocações dadas pelo *Kernel*, todos os jogadores estão numa espécie de “equilíbrio bilateral” (Roberto Serrano, 1999), na medida em que as alocações de cada um em relação aos outros estão igualizadas. Dito de outro modo, no *Kernel* estão todas as imputações onde nenhum jogador tem mais poder negocial sobre qualquer outro. O *kernel* é sempre não vazio e contém o núcleo, se este existir. Levanta também dificuldades de aplicação.

Nota. Quando nas expressões anteriores a alocação é uma pré-imputação, isto é, não é exigida a racionalidade individual, fala-se, por vezes, em *pré-Kernel*.

Exemplo 37. Considerando o jogo do exemplo 35, verifica-se que a imputação (1/3, 1/3, 1/3) pertence ao *kernel.*

18. Aplicações de Jogos Cooperativos

A teoria dos jogos cooperativos tem imensas aplicações. Desde logo o desenvolvimento de actividades e negócios que envolvam vários agentes e/ou operadores (jogadores) e seja necessário repartir os custos ou resultados que sejam de natureza comum. Empresas industriais que partilham infraestruturas comuns, aeronaves diferentes que utilizam o mesmo aeroporto, ou indivíduos que têm interesse em desempenhar actividades em conjunto, por exemplo, defrontam-se em geral com a questão da distribuição dos custos comuns ao conjunto.

18.1 Distribuição dos Custos de Investimento numa Infra-estrutura Logística

Exemplo 38 (**Aplicação à indústria petrolífera**). Quando o nosso país organizou a exposição internacional de Lisboa em 1998 (EXPO 98) houve necessidade de desactivar toda a área industrial de Cabo Ruivo, local onde iria decorrer a exposição. Nessa área, quatro empresas petrolíferas, Petrogal, Shell, BP e Mobil, dispunham de estruturas logísticas de recepção, armazenagem, movimentação e expedição de combustíveis, que abasteciam a região centro do país.

Dada a imposição de abandonar a área, punha-se a questão de criar novas estruturas para o efeito, o que poderia ser feito individualmente, ou em conjunto, tirando partido das economias de escala, por um lado, e da dificuldade de encontrar locais adequados, com ligação a terminais de combustíveis, ou refinarias. No final haveria que distribuir, de forma aceitável pelas partes, os custos de investimento que uma solução conjunta implicava. Tratava-se claramente de um jogo cooperativo *de 4-Pessoas*, em que se podia aplicar a metodologia apresentada. A solução encontrada, independentemente da forma como foi conseguida, consistiu na criação de uma estrutura logística instalada em Aveiras de Cima, conselho de Azambuja, ligada através de um pipeline multiprodutos à refinaria de Sines, participada pelas quatro empresas referidas. A entidade empresarial criada para o efeito foi a Empresa CLC – Companhia Logística de Combustíveis, SA.

Vejamos, através de números fictícios, embora realistas para este tipo de infra-estruturas, o que poderiam ser soluções para o problema, utilizando o valor de Shapley e o Nucléolo. O valor do investimento total para uma infra-estrutura deste tipo, para servir as necessidades das 4 empresas, assumiu-se ser de 250 milhões de euros. Esta infra-estrutura, que inclui um *pipe-line* multiproduto entre Sines e a Instalação em Aveiras, um parque de armazenagem, movimentação e expedição e os edifícios administrativos e de controle e gestão das operações.

As componentes operacionais estão naturalmente associadas á dimensão do complexo, enquanto as partes comuns são praticamente idênticas, qualquer que seja a sua dimensão. O ajustamento dos custos de investimento foi feito com base nos parâmetros de escala usuais nesta indústria, de cerca de 0,6, considerando uma expressão do tipo $\boldsymbol{Inv_1} = \boldsymbol{Inv_2}(\frac{\boldsymbol{P_1}}{\boldsymbol{P_2}})^{\boldsymbol{\beta}}$, em que $\boldsymbol{Inv_1}$ é o investimento associado à capacidade $\boldsymbol{P_1}$, $\boldsymbol{Inv_2}$ é o investimento associado à capacidade $\boldsymbol{P_2}$ e $\boldsymbol{\beta}$ é o parâmetro (elasticidade) de escala, que na indústria petrolífera é de cerca de 0,6. Atendendo às necessidades de cada empresa, em função do seu posicionamento no mercado, estabeleceu-se o investimento para cada possível parceria (coalizão), partindo do valor de 250 milhões para um projecto envolvendo todas as empresas.

A função característica (custos em milhões de euros) obtida no final foi a seguinte:

$\boldsymbol{v}(\{\ \}) = \mathbf{0}$; $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{1}\}) = \mathbf{165}$; $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{2}\}) = \mathbf{110}$; $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{3}\}) = \mathbf{80}$; $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{4}\}) = \mathbf{65}$; $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{1,2}\}) = \mathbf{210}$; $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{1,3}\}) = \mathbf{195}$; $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{1,4}\})$; $\mathbf{185}$; $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{2,3}\}) = \mathbf{145}$; $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{2,4}\}) = \mathbf{135}$; $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{3,4}\}) = \mathbf{110}$; $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{1,2,3}\}) = \mathbf{235}$; $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{1,2,4}\}) = \mathbf{225}$; $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{1,3,4}\}) = \mathbf{210}$; $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{2,3,4}\}) = \mathbf{165}$; $\boldsymbol{v}(\{\mathbf{1,2,3,4}\}) = \mathbf{250}$.

Apesar de envolver quatro jogadores, o nucléolo obteve-se rapidamente, dado que obtivemos solução única, e o primeiro problema de PL deu logo a solução final, que se encontra no quadro abaixo, tal como o valor de Shapley:

Milhões €	Nucléolo				V. Shapley			
Empresa	Valor	%	Ganho	%	Valor	%	Ganho	%
Emp. 1	106,25	42,5	58.75	35,6	113,75	45,5	51,25	31,1
Emp. 2	61,25	24,5	48,75	44,3	63,75	25,5	46,25	42,0
Emp. 3	46,25	18,5	33,75	42,2	42,08	16,8	37,92	47,4
Emp. 4	31,25	14,5	28,75	44,2	30,42	12,2	34,58	53,2

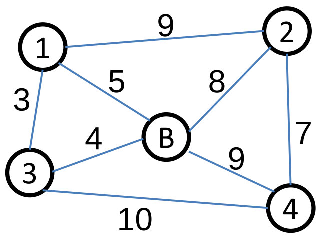
Verifica-se que o valor de Shapley aloca custos mais elevados aos jogadores “mais importantes”, e menores custos aos jogadores “menos importantes, relativamente ao Nucléolo. No entanto, em termos práticos as diferenças não são muito significativas. Ambas as soluções pertencem ao Núcleo, ou seja, são ambas soluções não dominadas, o que siginifica que este é um conjunto com um número infinito de soluções.

Nota. Podemos transformar o jogo original num jogo normalizado ou num jogo normalizado (0; 1), através de uma transformação linear, como vimos atrás, e calcular no novo jogo o valor de Shapley ou nucléolo. Para obter estas soluções no problema original basta “desfazer” a transformação linear que levou à passagem de um jogo ao outro.

18.2 Distribuição de custos numa Árvore Geradora Mínima

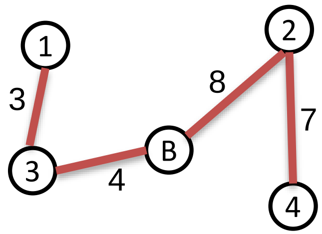
Exemplo 39. Quando se estabelecem de raíz de redes de comunicações, redes rodoviárias, redes de irrigação, etc., pretende-se em geral determinar uma Árvore Geradora Mínima (AGM), ou seja, uma árvore que inclua todos os vértices, mas que tenha um comprimento total mínimo. Este comprimento pode referir-se a distâncias, custos, tempos, etc. Uma árvore de um grafo, como se sabe, tem n vértices e n-1 arestas, ou seja todos os vértices estão ligados com o menor número possível de arestas (ligações). Em muitos caso, para além se pretender determinar a árvore geradora mínima é necessário imputar os custos aos vértices (a n-1 vértices que têm de ser ligados a um vértice original). Esse problema não é geral resolvido pela obtenção da AGM, embora os valores na árvore obtida indiquem uma solução admissível. Como se referirá mais à frente, a ventilação dos custos pode ser resolvida através da obtenção da solução de um jogo cooperativo. Ilustremos com um exemplo numérico.

Os responsáveis de uma região pretendem construir uma rede de abastecimento de água a quatro povoações (autarquias) a partir de uma barragem existente na região. As ligações possíveis, bem como os custos de investimento, em milhões de euros, nas condutas e nas estações de bombagem, associados às ligações são os indicados na rede que se segue:



Nota. **B** é a barragem, e 1, 2, 3 e 4 são as povoações a ser abastecidas.

O primeiro passo consiste em construir a função característica, que representa o custo envolvido com cada coalizão. A coalizão {1} significa que a povoação 1 associa-se sozinha com a barragem para ser abastecida, suportando os custos de investimento, e o melhor que consegue é um custo de 5 milhões. Por sua vez a grande coalizão envolve uma parceria das quatro povoações com a barragem e o custo é o que resulta da árvore geradora mínima ou árvore mínima de suporte ao grafo com os cinco vértices. Aplicando o algoritmo de Prim, a árvore geradora mínima tem um “comprimento” de 22 milhões de euros e tem a configuração seguinte:

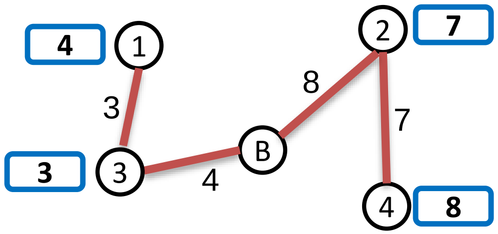


Trata-se agora de repartir este investimento pelas 4 autarquias. Verifica-se então que a função característica é obtida através de obtenção das diversas AGM´s para cada coalizão, conjunto formado pelas povoações e pela barragem. Claro que neste problema, face ao pequeno numero de vértices, as árvores são fáceis de construir. Assim, vem:

$\boldsymbol{v(\{\ \}) = 0;\ v(\{1\}) = 5;\ v(\{2\}) = 8;\ v(\{3\}) = 4;\ v(\{4\}) = 9;\ v(\{1,2\}) = 13;\ v(\{1,3\}) = 7;\ \ v(\{1,4\}) = 14;\ v(\{2,3\}) = 12;\ v(\{2,4\}) = 15; v(\{3,4\}) = 13;\ v(\{1,2,3\}) = 15; v(\{1,2,4\}) = 20; v(\{1,3,4\}) = 16; v(\{2,3,4\}) = 19;\ \ v(\{1,2,3,4\}) = 22.}$

Depois da resolução, obtêm-se os valores de Shapley e o Nucléolo, que neste caso coincidem e indicam a seguinte distribuição dos custos de investimento:

- Povoação 1: 4 (individual = 5) milhões de euros;
- Povoação 2: 7 (individual = 8) milhões de euros;
- Povoação 3: 3 (individual = 4) milhões de euros;
- Povoação 4: 8 (individual = 9) milhões de euros.



Relativamente à opção individual, com esta solução, cada povoação obtém, através da cooperação na grande coalizão, uma economia de 1 milhão de euros.

As soluções encontradas – valor de Shapley e Nucléolo – pertencem ao núcleo, como é fácil de verificar. Aliás, Granot e Huberman (1981) mostraram que o núcleo de um jogo com esta estrutura nunca é vazio. Além disso, uma solução, pertencente ao núcleo (não dominada), de grande simplicidade, e de leitura imediata, é que se obtém considerando o valor (custo de investimento neste caso) associado ao arco emergente a cada nodo da rede, excepto naturalmente, o nodo que representa a barragem. Neste caso temos: nodo 1 – 3; nodo 3 – 4; nodo 2 – 8; nodo 4 – 7, solução que relativamente à anterior retira 1 milhão de euros a cada uma das povoações 1 e 7, em detrimento das povoações 2 e 3. Claramente a solução do nucléolo e de Shapley é mais equilibrada, pois distribui a economia conseguida na solução conjunta por todos igualmente, enquanto esta solução distribui as mesmas economias apenas pelas povoações 1 e 4.

18.3 O Problema da Insolvência e o mistério religioso no Talmud

Um dos exemplos clássicos da teoria dos jogos cooperativos é o designado em inglês por “bankruptcy problem”, ou problema da insolvência. Este problema põe-se quando uma entidade, uma pessoa singular ou uma empresa, por exemplo, tem um património (activos) que é insuficiente para pagar as suas dívidas (passivos). A questão principal é como distribuir o património (massa falida) pelos diversos credores. Como se sabe, este problema pode ter várias soluções, dependendo das leis do país ou das condições contratuais em que foram contraídas as dívidas, podendo haver credores preferenciais, ou não.

Genericamente, um problema de insolvência (*bankruptcy problem*) é definido como um par $(\boldsymbol{E}; \boldsymbol{d_1}, \boldsymbol{d_2}, \dots, \boldsymbol{d_n})$, onde $\boldsymbol{E}$ representa o património disponível e $\boldsymbol{d_1}, \boldsymbol{d_2}, \dots, \boldsymbol{d_n}$ o montante em dívida aos credores $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{n}$, respectivamente. Supõe-se que as dívidas são ordenadas de forma não decrescente, isto é, $\mathbf{0} \le \boldsymbol{d_1} \le \boldsymbol{d_2} \le \cdots \le \boldsymbol{d_n}$, e que o património é inferior ao total das dívidas, $\boldsymbol{d}$, isto é, $\boldsymbol{E} \le \boldsymbol{d_1}, +\boldsymbol{d_2} + \cdots + \boldsymbol{d_n} = \boldsymbol{d}$, caso contrário não haveria problema de insolvência.

Uma divisão do património é um vector $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n})$, com $\boldsymbol{x_i} \ge \mathbf{0}$, com qualquer $\boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{n}$, e $\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} + \cdots + \boldsymbol{x_n} = \boldsymbol{E}$. Podem ser propostas várias soluções para a repartição do património:

Divisão Proporcional: cada credor $\boldsymbol{i}$ recebe $\boldsymbol{x_i} = \frac{\boldsymbol{d_i}}{\boldsymbol{d}}\,\boldsymbol{E}, \quad \forall\, \boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{n}$

Esta é uma solução frequente, prevista nas leis modernas, e, por isso, muito considerada pelos sistemas judiciais. A racionalidade subjacente a este critério é que cada unidade monetária de dívida deve ser tratada da mesma forma; existe o primado da unidade monetária sobre a pessoa (credor). Mas não é óbvio que este seja o único critério “justo” ou razoável para fazer a distribuição. Por exemplo, podemos encarar uma divisão igual por todos, ou seja:

- ***Divisão Equitativa:*** cada credor $\boldsymbol{i}$ recebe o mesmo, $\boldsymbol{x_i = \frac{E}{n},\quad \forall\, i = 1, 2, \dots, n}$ e $\boldsymbol{d_1 > \frac{E}{n}}$

Esta divisão faz algum sentido sobretudo se o património é inferior à menor das dívidas, isto é, $\boldsymbol{E < d_1}$, pois todos reclamam a totalidade do património e pode pensar-se que a dívida acima desse valor é irrelevante, pois ninguém recebe mais do que existe para distribuir.

- ***Divisão Equitativa com Limitações nos Ganhos:*** cada credor recebe o mesmo montante, mas nenhum recebe mais do que reclama, isto é, do que a sua dívida. Em termos simbólicos, um valor $\boldsymbol{a}$ tal que

$$\boldsymbol{\min(d_1, a) + \min(d_2, a) + \cdots + \min(d_n, a) = E}$$

e cada credor $\boldsymbol{i}$ recebe o montante dado por $\boldsymbol{\min(d_i, a)}$. Prova-se que o valor $\boldsymbol{a}$ existe sempre e é único.

- ***Divisão Equitativa das Perdas:*** cada credor fica com a mesma perda. Como o total de perdas é igual a $\boldsymbol{d - E}$**,** estas são divididas igualmente pelos credores, recebendo cada credor $\boldsymbol{i}$ o montante $\boldsymbol{x_i = d_i - (d - E)/n}$, com $\boldsymbol{d_1 \geq (d - E)/n}$, pois não faz sentido o contrário.

- ***Divisão Equitativa com Limitações nas Perdas:*** cada credor tem a mesma perda, mas nenhum perde mais do que reclama, ou seja, a perda individual é limitada pelo montante reclamado.

Esta regra é semelhante à *Divisão Equitativa com Limitações nos Ganhos*, só que em vez de se distribuir o património distribuem-se as perdas, devendo cada um receber o montante em dívida menos a perda distribuída.

Como se verifica, podemos imaginar diferentes soluções para distribuir o património pelos credores. O problema da insolvência já é muito antigo, e aparece relatado, cerca de 2000 anos atrás, no livro Babilónico Talmud, livro que contém a compilação das antigas leis e tradições e serve de base para a religião, leis civis e criminais judaicas, e que constitui talvez a primeira e mais interessante antecipação da teoria dos jogos cooperativos. Assim, um dos problemas discutidos no Talmud é o de um sujeito que morre e estabelece a divisão do seu património pelas suas três mulheres, devendo a primeira receber 100, a segunda 200 e a terceira 300 unidades monetárias (u. m.). O Talmud recomenda que no caso do património ser de 100 u. m., cada mulher deve receber um terço. Caso o património seja de 200 u. m., a primeira recebe 50 e os restantes duas, 75 cada. No caso de o património ser de 300 u. m., então a distribuição deve ser: 50 u. m. para a primeira mulher, 100 u. m. para a segunda e 150 u. m. para a terceira. Este mesmo problema punha-se em geral para a distribuição das heranças ou na divisão do património pelos credores quando aquele é insuficiente para solver os compromissos para com estes.

Este problema, e a explicação da eventual racionalidade que está subjacente às repartições indicadas, deu origem a uma das mais fascinantes discussões do problema da insolvência ao longo de séculos e só teve uma explicação cabal nos anos oitenta do século vinte, a partir dos trabalhos de Aumann e Maschler, através da Teoria dos Jogos.

De facto, chegou a pensar-se que a repartição equitativa do património quando este era de 100 u.m. poderia dever-se ao facto de ser um valor pequeno e não valer a pena fazer uma repartição diferente, para além de fazer sentido, enquanto critério de repartição proporcional, ao distribuir metade da dívida a cada credor, quando o valor atingia os 300, também não oferecia dúvidas, e parecia fazer sentido, embora pudesse parecer inconsistente com o anterior, mas isso poderia ter a ver com menor dimensão do primeiro. Já a repartição das 200 u. m. permanecia um mistério, aventando alguns mesmo a hipótese de ser fruto de erros na transcrição dos textos.

No entanto, nos anos oitenta, Robert Aumann (que seria laureado com o prémio Nobel da economia em 2005) e Michael Maschler escreveram um *paper, Game Theoretic Analysis of Bankruptcy Problem from the Talmud, 1985*, onde anunciavam que tinham desvendado o mistério, e sugerindo que não havia erros nem inconsistências na resposta do Talmud.

Os autores provaram que a resposta para cada divisão do património era o nucléolo de um jogo cooperativo – *jogo da insolvência* - adequadamente definido.

Claro que o conceito de nucléolo é recente (1969) e não foi seguramente esse o principio estabelecido no Talmud há cerca de 2000 anos. Muitos investigadores e historiadores do judaísmo tentaram, ao longo dos anos, descobrir o algoritmo que poderia estar por detrás da solução preconizada no Talmud.

No entanto, um outro problema separado, e aparententemente independente (como se verá, só aparentemente), aparece também referido no Talmud, conhecido como o “Contested Garment Problem”. Neste problem dois sujeitos reivindicam uma peça de tecido (um activo, ou património, em linguagem geral), um deles reinvidica metade e o outro a totalidade. O Talmud dá uma respota clara, sem ambiguidades, para este problema: o que reinvidica metade, recebe um quarto, ou seja, metade do que pretende, e o que reclama a totalidade recebe a parte não reivindicada pelo primeiro e metade da pretendida por este, ou seja três quartos. A regra subjacente é simples: *a parte não reinvidicada por um vai totalmente para o outro; a parte restante, que é reivindicada por ambos, é dividida igualmente.* Esta regra é conhecida por **Divisão Equitativa da Soma Contestada**. Para diferentes reinvidações e diferentes patrimónios, tem-se:

		Reivindicação	
		100	200
	66 2/3	33 1/3	33 1/3
Activo	125	50	75
	150	50	100

		Reivindicação	
		100	300
	66 2/3	33 1/3	33 1/3
Activo	125	50	75
	200	50	150

		Reivindicação	
		200	300
	66 2/3	33 1/3	33 1/3
Activo	150	75	75
	250	100	150

Formalmente, dado um problema de insolvência, com património $\boldsymbol{E}$ e dois credores, com dívidas $\boldsymbol{d_1}$ e $\boldsymbol{d_2}$, respectivamente, em que $\mathbf{0} < \boldsymbol{d_1} \leq \boldsymbol{d_2}$ e $\mathbf{0} < \boldsymbol{E} \leq \boldsymbol{d_1} + \boldsymbol{d_2}$, de acordo com a “Contested Garment Rule” ou **Regra CG,** a distribuição é feita da seguinte forma:

Credor 1 recebe: $\boldsymbol{x_1 = max(0; E - d_2) + \frac{1}{2}[E - max(0; E - d_1) - max(0; E - d_2)]}$

Credor 2 recebe: $\boldsymbol{x_2 = max(0; E - d_1) + \frac{1}{2}[E - max(0; E - d_1) - max(0; E - d_2)]}$

Diz-se então que a solução é consistente com a *regra CG*, ou *CG-consistente*, ou simplesmente *Consistente***.** Esta regra foi generalizada a um problema de insolvência $(\boldsymbol{E};\ \boldsymbol{d_1, d_2, \dots, d_n})$, com $\boldsymbol{0 < d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n}$ e $\boldsymbol{0 < E \leq d_1 + d_2 + \cdots + d_n}$, dizendo-se que uma solução

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 + \cdots + x_n = E}$$

(sendo $\boldsymbol{x_i}$ o montante a receber pelo credor i) é *CG-consistente* ou *Consistente,* se para todo o $i \neq j$, a divisão $\boldsymbol{x_i + x_j}$, estabelecida pelam regra CG para as dívidas $\boldsymbol{d_i, d_j}$ é $(\boldsymbol{x_i},\ \boldsymbol{x_j})$. Intuitivamente, uma solução é consistente se para qualquer par de credores, i e j, utilizarem a regra CG para proceder á divisão entre eles o montante total $\boldsymbol{x_i + x_j}$, obtêm o valor que lhes é dado pela solução.

Aumann e Maschler (1985) provaram, através de um teorema importante, que num problema de divisão patrimonial (problema de insolvência) a única alocação que é consistente com a *Regra CG* é também o nucléolo do jogo cooperativo que lhe está associado.

De um modo geral, o *Jogo da Insolvência* $(\boldsymbol{N, v})$ correspondente ao problema da insolvência $(\boldsymbol{E};\ \boldsymbol{d_1, d_2, \dots, d_n})$ é definido da seguinte forma:

$$\boldsymbol{N = \{1, 2, \dots, n\}} \text{ é o conjunto dos } \boldsymbol{n} \text{ credores,}$$

$$\boldsymbol{v(S) = max\left(0; E - \textstyle\sum_{j \in N \setminus S} d_j\right), \forall\, S \subset N} \qquad (2.44)$$

em que a função característica representa o que cada coalizão pode receber sem recurso ao tribunal, ou seja o que sobra depois dos restantes elementos ($\boldsymbol{N \setminus S}$ – complementar de $\boldsymbol{S}$) receberem as suas dívidas. Verifica-se facilmente que o jogo da insolvência satisfaz as seguintes propriedades:

i) $v(N) = E$

(ii) $v(N - \{i\}) = max(0;\ E - d_i)$

(iii) $v(\{i\}) = max(0; E - \sum_{j \in N - \{i\}} d_j) \leq d_i$

(iv) $d_i \geq E \Rightarrow v(S) = 0, \forall S \subset N - \{i\}, i = 1, 2, \dots, n$

Exemplo 40. Considere-se então exemplo referido no Talmud, com um património de 200 u. m. e dívidas de 100, 200 e 300 u. m., cuja solução foi sempre a mais dificil de entender até á solução apresentada por Aumanne Maschler. Função característica:

$$v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = 0; v(\{2,3\}) = 100; v(\{1,2,3\}) = 200$$

Utilizando o método apresentado atrás, através de resolução de sucessivos problemas de PL, obtém o nucléolo com $x_1 = 50$, $x_2 = 75$ e $x_3 = 75$, que corresponde à solução dada pelo Talmud. A título ilustrativo, comparemos agora, com este mesmo património de 200 u. m., com as duas soluções alternativas, que correspondem à distribuição equitativa e à distribuição proporcional, estabelecidas, respectivamente, para os patrimónios de 100 e 300 u. m., e verifiquemos que a solução do Talmud é aquela que minimiza a máxima insatisfação:

$e(x, S)$

S	$v(S)$	(50; 75; 75)	(66,6; 66,7; 66,7)	(33,4; 66,7; 100)
{1}	0	-50	-66,6	-33,4
{2}	0	-75	-66,7	-66,7
{3}	0	-75	-66,7	-100
{1, 2}	0	-125	-133,3	-100
{1, 3}	0	-125	-133,4	-133,4
{2, 3}	100	-50	-33,4	-66,7

Ordenação não crescente

(50; 75; 75)	(66,6; 66,7; 66,7)	(33,4; 66,7; 100)
-50	-33,4	-33,4
-50	-66,6	-66,7
-75	-66,7	-66,7
-75	-66,7	-100
-125	-133,3	-100
-125	-133,4	-133,4

Esta mesma conclusão seria, obviamente, obtida para quaisquer outras soluções diferentes consideradas.

Verifica-se novamente que a solução (50; 75; 75), correspondente ao Nucléolo, é lexicograficamente a menor (princípio do *minimax* numa função de ganhos), como se esperava, e em que a insatisfação máxima (o excesso) é mínima ou, de forma equivalente se passarmos ao simétrico, a satisfação mínima é máxima (principio do *maxmin*).

De forma semelhante, verificamos que os nucléolos correspondentes aos jogos de insolvência com o património igual a 100 e 300 u. m. seriam, respectivamente, (100/3; 100/3; 100/3) e (50; 100; 150), ou seja, os indicados no Talmud.

A título de curiosidade, verificamos que o valor de Shapley para os casos em que o património é 100 e 300 dá uma solução idêntica. Já no caso em que o património é 200, a solução é diferente, embora também neste caso os credores 2 e 3 recebam o mesmo montante, 83,3, em vez de 75, à custa de menor valor para o credor 1.

Exemplo 41. Considere-se que uma entidade está insolvente, dispondo de um património de 600 milhões de euros, mas tem dívidas a quatro credores cujos montantes são, respectivamente, 100, 200, 300 e 400 milhões de euros. O montante a distribuir por cada credor, ou grupo de credores em associação, é o que resulta depois de satisfazer os credores fora da coalizão (associação). Qual o montante a distribuir a cada credor de acordo com a solução proposta pelo nucléolo (minimizar a insatisfação máxima) e de acordo com o valor de Shapley?

Trata-se de um problema de insolvência com 4 jogadores (credores), com dividas de 1 000 milhões de euros, bem acima dos 600 milhões de euros de património. A função característica é então:

$\boldsymbol{v}(\emptyset) = \boldsymbol{v}(\{\mathbf{1}\}) = \boldsymbol{v}(\{\mathbf{2}\}) = \boldsymbol{v}(\{\mathbf{3}\}) = \boldsymbol{v}(\{\mathbf{4}\}) = \boldsymbol{v}(\{\mathbf{1},\mathbf{2}\}) = \boldsymbol{v}(\{\mathbf{1},\mathbf{3}\}) = \mathbf{0};\ \boldsymbol{v}(\{\mathbf{1},\mathbf{4}\}) = \boldsymbol{v}(\{\mathbf{2},\mathbf{3}\}) = \mathbf{100}; \boldsymbol{v}(\{\mathbf{2},\mathbf{4}\}) = \mathbf{200};$
$\boldsymbol{v}(\{\mathbf{3},\mathbf{4}\}) = \mathbf{300};\ \boldsymbol{v}(\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3}\}) = \mathbf{200}; \boldsymbol{v}(\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{4}\}) = \mathbf{300}; \boldsymbol{v}(\{\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{4}\}) = \mathbf{400}; \boldsymbol{v}(\{\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4}\}) = \mathbf{500}; \boldsymbol{v}(\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{6}\}) = \mathbf{600}$

Resolvido através da PL, o valor do nucléolo é (50; 100; 175; 275). Já o valor de Shapley é (58,3; 125; 175; 241,7).

Relativamente ao nucléolo, a regra estabelecida para o exemplo do Talmud, indicada no anexo 1, pode ser aplicada neste jogo de 4 jogadores, sendo fácil indicar o montante a receber por cada credor em função do património disponível, bastante generalizar a aplicação da regra. A título ilustrativo, refira-se que para um património inferior ou igual a 200, todos os credores recebem o mesmo. Para um património de 500, isto é, metade da dívida, cada um recebe metade da sua dívida.

18.4 Tarifação de Aeronaves num Aeroporto

Já indicamos atrás, com um exemplo simples, como a teoria dos jogos pode ajudar a estabelecer as tarifas de utilização num aeroporto pelos vários tipos de aviões, que em geral exigem condições operacionais diferentes. Este tipo de aplicações dá origem a problemas que envolvem muitos jogadores, que exigem softwares poderosos. Como em muitas situações o valor da função característica resulta do valor que ela assume para o jogador “mais exigente” (avião que exige maior tamanho), o problema pode ser simplificado, como vimos no exemplo atrás referido.

Um exemplo prático muito referido na literatura, da autoria de LITTLECHILD & THOMPSON (1977), foi uma aplicação ao aeroporto de Birmingham (Inglaterra), em que os autores procederam a uma análise de custos de uso do aeroporto. Para tal, construíram um jogo com 13572 agentes no qual o núcleo, devido à economia de escala na construção das pistas de decolagem, se apresentou não-vazio. A seguir calcularam o nucléolo, o qual, no caso, determina a taxa para todas aeronaves de diferentes tamanhos. Os resultados a que chegaram resumem-se no quadro que se apresenta a seguir e que foi retirado de *A Simple Expression for the Nucleolus in a Special Case*, S. C. LITTLECHILD (1974).

Tipo Avião	Nº i	Nº movts/Avião m_i	C. Op./movt a_i (£)	C. Capital/ano c_i (£)	Nucléolo x_i (£)	Nucléolo+ Fee Movt $a_i + x_i$ (£)	Fees Mov. (1969-68) f_i (£)
Fokker Friend. 27	1	42	5,23	65 899	7,89	13,12	5,80
Viscount 800	2	9 555	6,09	76 725	7,89	13,98	11,40
Hawker Sid. Trident	3	288	7,55	95 200	7,89	15,44	21,70
Britannia 100	4	303	7,71	97 200	7,89	15,60	29,80
Caravelle VLR	5	151	7,73	97 436	7,89	15,62	20,30
BAC 111 (500)	6	1 315	7,79	98 142	7,89	15,68	16,70
Vanguard 953	7	505	8,13	102 496	7,89	16,02	26,40
Comet 4B	8	1 128	8,32	104 849	7,89	16,21	29,40
Britannia 300	9	151	8,99	113 322	40,16	49,13	34,70
Convair Corronado	10	112	9,16	115 440	40,16	49,30	48,30
Boeing 707	11	22	9,34	117 646	103, 46	112,80	66,70
Totais		$\sum m_i = 13\,572$	$\sum m_i a_i = 90\,411$	$c_n = 117\,676$	$\sum m_i x_i = 117\,667$	$\sum m_i(a_i+x_i) = 208\,078$	$\sum m_i f_i = 208\,087$

Nota. As diferenças são devidas a arredondamentos.

Observando as taxas pagas entre 1968 e 1969, verifica-se que houve subsidiação cruzada entre os vários tipos de aeronaves, nomeadamente as aeronaves menor e maior pagaram bastante menos, enquanto a maior parte das aeronaves intermédias pagaram em geral mais do que o proposto pelo nucléolo.

Utilizando os dados dos autores, fizemos os mesmos cálculos para o valor de Shapley, que constam do quadro seguinte, e as conclusões não são muito diferentes, com a particularidade de para os três tipos maiores de aeronaves essa diferença ser ainda maior, ou seja, beneficiarem ainda mais da "subsidiação" cruzada. Estes cálculos coincidem com o dos autores S. C. LITTLECHILD e OWEN apresentaram no artigo *A Simple Expression for the Shapley Value in a Special Case (1973).*

Tipo Avião	Nº i	Nº movts/Avião m_i	C. Op./movt a_i (£)	C. Capital/ano c_i (£)	V. Shapley x_i (£)	V. Shapley+ Fee Movt $a_i + x_i$ (£)	Fees Mov. (1969-68) f_i (£)
Fokker Friend. 27	1	42	5,23	65 899	4,86	10,09	5,80
Viscount 800	2	9 555	6,09	76 725	5,66	11,75	11,40
Hawker Sid. Trident	3	288	7,55	95 200	10,30	17,85	21,70
Britannia 100	4	303	7,71	97 200	10,85	18,56	29,80
Caravelle VLR	5	151	7,73	97 436	10,92	18,65	20,30
BAC 111 (500)	6	1 315	7,79	98 142	11,13	18,92	16,70
Vanguard 953	7	505	8,13	102 496	13,40	21,53	26,40
Comet 4B	8	1 128	8,32	104 849	15,07	23,39	29,40
Britannia 300	9	151	8,99	113 322	44,80	53,79	34,70
Convair Corronado	10	112	9,16	115 440	60,61	69,77	48,30
Boeing 707	11	22	9,34	117 646	162,24	171,58	66,70
Totais		$\sum m_i = 13\ 572$	$\sum m_i a_i = 90\ 411$	$c_n = 117\ 676$	$\sum m_i x_i = 117\ 676$	$\sum m_i(a_i+x_i) = 208\ 087$	$\sum m_i f_i = 208\ 087$

18. 5 Distribuição dos Custos de uma Barragem para Fins Múltiplos

Suponha-se a construção de uma infra-estrutura, por exemplo uma barragem, mas me que é necessário atender a vários objectivos: regularização dos caudais de um rio para controle de enchentes, fornecer água para irrigação e produção de electricidade. Se a sua construção tiver apenas em vista um dos fins referidos, os custos de investimento são diferentes Se a construção for promovida por uma entidade pública, como é muitas vezes o caso, essa entidade pode decidir arbitrariamente quais os custos a atribuir a cada finalidade, mas mesmo que o faça não procurará que essa atribuição tenha alguma racionalidade, quer por razões de boa gestão e transparência quer até porque de um modo geral envolve a entidades e tutelas políticas diferentes, que não deixarão de defender os seus interesses. Se os promotores forem entidades privadas, o problema põe-se igualmente, até com maior acuidade, pois cada uma tem responsáveis (accionistas ou sócios) cuja motivação principal é o lucro e a quem é preciso prestar contas.

Neste caso temos agora 3 agentes cada um com interesses diferentes: por hipótese, o primeiro interessado na produção de energia eléctrica, o segundo interessado na regularização dos caudais e o terceiro interessado na contenção de água para irrigação. Se o empreendimento for realizado tendo em conta, separadamente, cada um dos objectivos, naturalmente que os custos de investimento serão bastante mais elevados do que os que decorrem de um empreendimento conjunto, isto é, com fins múltiplos. A questão que se põem é então a seguinte: qual deverá ser a distribuição de custos entre os 3 agentes para que se construa uma só barragem para atender conjuntamente aos três objectivos, dado que dessa forma teriam um ganho em relação ao custo que teriam se as barragens fossem construídas individualmente?

Exemplo 42. O custo de investimento de uma barragem visando exclusivamente a produção eléctrica estima-se em 1 000 u.m., já o custo de um empreendimento tendo em vista exclusivamente a regularização dos caudais é estimado em 800 u.m.; finalmente, o custo de uma represa visando exclusivamente as actividades de regadio custa 700 u.m.. No entanto se as entidades se juntarem para fazer uma infra-estrutura visando satisfazer simultaneamente os três objectivos o custo total será da ordem das 2 000 u.m., representado uma poupança de 500 u.m.. Em todo o caso, podem ser feitas parcerias para satisfação de apenas dois objectivos, cujos custos são os seguintes: produção de electricidade e regularização de caudais com custo total de 1 600 u.m., produção de electricidade e abastecimento de água com custos totais de 1 500 u.m., e finalmente, abastecimento de água e regularização de caudais envolvendo um custo total de 1 400, havendo também poupanças, embora menores.

O problema foi resolvido e a solução encontrada para o valor de shapley e para o Nucléolo coincide e é (800; 650; 550), para as componentes eléctrica, regularização de caudais e irrigação, respectivamente. A entidade responsável pelo empreendimento eléctrico pouca 200 u.m e as duas restantes poupam 150 u.m cada, em relação à solução individual.

Também poupam em relação a qualquer parceria a dois. Verifica-se também que esta solução está no núcleo, ou seja, é uma solução não dominada, significando que pode ser considerada uma solução “justa”.

Claro que estando o poder de decisão num poder central, a sua aceitação pode ser imposta, ainda que com alguma eventual resistência de algum agente, mas é um facto que esta é uma solução com racionalidade, pois distribui de acordo com o contributo marginal esperado para os custos (valor de Shapley) e maximiza a satisfação mínima (nucléolo), como vimos quando abordamos estes conceitos. Por outro lado, qualquer dos agentes não encontra uma solução alternativa que domine a solução proposta (pertence ao núcleo), pelo que esta, em princípio, deve ser a preferida. Deste modo, o mediador da questão, poderá utilizar estes argumentos, como forma de persuasão, para levar os agentes a concordarem com a decisão.

Finalmente, uma breve referência a uma aplicação muito salientada na literatura, que foi proposta por Martin Shubik em *Incentives, Descentralized Control, the Assignement of Joint Cost and Internal Price,* Management Science (1962), para resolver algumas das dificuldades que a Contabilidade tradicional apresenta quando trata a distribuição dos custos conjuntos, já que os critérios utilizados em geral não apresentam formas descentralizadas de incentivos, às diversas divisões produtivas de um corporação, para a inovação.

Segundo Shubik, a gestão de uma organização deveria ter como objectivo implementar um sistema de incentivos que valorizasse o mérito na assumpção de riscos, no processo de decisão, e premiasse individualmente em função dos resultados da decisão para a organização como um todo. Uma forma de o fazer será projectar uma forma de conformidade dos objectivos individuais com os objectivos globais, de modo que a melhor decisão individual coincida com a melhor decisão para a corporação como um todo. Este requisito nem sempre está garantido pelos métodos tradicionais de distribuição de custos oferecidos pela contabilidade convencional.

Uma situação típica, e muito frequente, acontece quando uma decisão pode provocar o aumento dos lucros da corporação, mas ao mesmo tempo reduzir os resultados contabilísticos de uma sua divisão, ou filial, por exemplo, devido a um “downgrade” da capacidade produtiva desta divisão.

Os resultados líquidos da corporação podem ser vistos como o resultado agregado das suas unidades produtivas, os quais são coordenados através de uma optimização conjunta (por exemplo, uma empresa petrolífera, com várias refinarias).

Por sua vez, os conjuntos administrativos ou corporativos, que são conjuntos, devem ser rateados pelas unidades de negócio, de modo a conseguir a congruência entre o interesse local e o interesse global. Esta situação configura um jogo cooperativo cujos agentes são centros de decisão pertencentes à corporação.

Claro que poderiam ser apresentados mais exemplos, tal como a distribuição de custos em redes de telecomunicações, redes eléctricas, redes de gás ou redes de água, em que o óptimo económico é atingido com uma única infra-estrutura, mas em que é importante a existência de concorrência entre operadores, em que a teoria dos Jogos pode contribuir para encontrar melhores soluções e até ser um precioso auxiliar nos sistemas de regulação económica. Na literatura, encontramos muitas aplicações, mas estes ilustram bem a importância dos jogos cooperativos na Economia e na Gestão, à semelhança, aliás, do que acontece com os jogos não-cooperativos.

19. ANEXO

Regra para dividir a herança no Talmud

Património	Dívida 100	Dívida 200	Dívida 300
100	**100/3**	**100/3**	**100/3**
150	50	50	50
200	50	75	75
250	50	100	100
300	50	100	150
350	50	100	200
400	50	125	225
450	50	150	250
500	50+50/3	150+50/3	250+50/3
550	50+100/3	150+100/3	250+100/3
600	100	200	300

0. ordenar as dívidas por ordem crescente;

1. Dividir igualmente o património até atingir metade da dívida menor;
2. Depois de atribuir esse valor à dívida menor, distribuir igualmente pelos restantes credores o restante património até atingir metade da dívida seguinte;
3. Proceder assim sucessivamente até que todos os credores atinjam metade da sua dívida;
4. Fazer o caminho inverso, partindo do credor com maior parte por cobrar atribuindo-lhe o restante património até que a sua dívida não paga atinja o mesmo valor da do credor seguinte;
5. Dividir o restante património igualmente até que o montante em dívida seja igual ao do credor seguinte, e assim sucessivamente até que todos os credores tenham o mesmo montante em dívida;
6. Distibuir a parte restante igualmente por todos;
7. O processo termina quando se esgotar o património ou quando todas as dívidas estiverem pagas.

20. Bibliografia

[1] Aumann, R. and Mascheler M., *Game theoretic analysis of th bankruptcy problem from the Talmud*. Journal of economic Theory, 1985.

[2] Davis, M. and M. Maschler, *The Kernel of a Cooperative Game*, Naval Research Logistics Quarterly 12, 1995.

[3] Ferguson, T. S., *Game Theory*, Department of Mathematics, UCLA, 2014.

[4] Gale, D., Kuhn, H. W. and Tucker, A. W., *Linear Programming and the Thory of Games*, in Koopmans, T. C. (ed.) Activity Analysis of Production and allocation, Wiley, 1951.

[5] Granot, D. S. and Huberman, G., *On the Core and Nucleolus of a Minimum Cost Spaning Tree Games*, Mathematical Programming, 1984.

[6] Kohlberg, E., *The Nucleolus as a Solution of a Minimization Problem*, SIAM J. Appl. Math., 1972.

[7] Leng M. and Parlar M., *Analytic Solution for the Nucleolus of a Three Player Cooperative Game,* Naval Research Logistics, 2010.

[8] Littlechild, S. C., *A Simple Expression for The Nucleolus in a Special Case,* Journal of Game Theory, Vol. 3, Physica-Verlag, Viena, 1974.

[9] Littlechild, S. C., *A Simple Expression for The Shapley Value in a Special Case,* Management Science, 20, 1973.

[10] Luce, R. D. and Raifa H., *Games and Decision*, Wiley & Sons. N. York, 1957.

[11] Nash J. F., *Non-cooperativ Games*, Annals of Mathematics, nº 54, 1951.

[12] Neumann J. v. and Morgenstern O., *Theory of Games and Economic Behavior,* Princeton University Press, 1972.

[13] Owen G., *Game Theory*, 3rd ed. Inc., London: Academic Press, 1995.

[14] Samuelson, P. A. and Nordhaus, W. D., *Economia,* McGaw-Hill, 2005.

[15] Sankaran, J. K., *On Finding The Nucleolus of an N- Person Cooperative Game*, International Journal of game theory, 1991.

[16] Sartini, B. A., Garbugio, G., Bortolossi, H. J., Santos, P. A. e Barreto, L. S., *Uma Introdução à Teoria dos Jogos,* II Bienal da SBM,2004, Universidade Federal da Bahia.

[17] Serrano R., *Four Lectures on the Nucleolus and the Kernel,* 10 th Summer School in Economic Theory, Department of Economics, Brown University, 1999.

[18] Shapley, L. S., *A value for n-person games*, in “Contributions to the Theory of Games II”, Annals of Mathematics Studies, vol 28, Princeton Univ. Press, 1953.

[19] Shubik M. , *Game Theory in Social Sciences*, MIT Press, Massachusets, 1987.

[20] Pinto J., Tarcísio P. S., Hein N., *Sistemas de Informação interdependentes: Uma aplicação da Teoria dos Jogos na Distribuição do Custo Conjunto, XIV Congresso Brasileiro de Custos,* Brasil 2007.

[21] Winston, L. W., *Operations Researh*: Applications and Algorithms, 4th ed., Thomson Brooks/Cole, 2012, USA.